Wybrane zagadnienia z geometrii płaszczyzny

Danuta Zaremba

Wstęp

Publikacja ta powstała z myślą o studentach, którzy chcą zdobyć uprawnienia do nauczania matematyki w szkole. Zawiera ona nieco podstawowych wiadomości z geometrii płaszczyzny i trochę zadań z nimi związanych. Jest to oczywiście geometria euklidesowa. Czytelnik może odświeżyć swoją szkolną wiedzę, być może poszerzyć ją, a na pewne zagadnienia spojrzeć nieco inaczej, często głębiej. Ma też okazję do poćwiczenia umiejętności rozwiązywania zadań. Do niektórych zadań, oznaczonych symbolem *, podane są podpowiedzi, a niekiedy nawet rozwiązania (rozdział 11).

Nie jest to żaden systematyczny wykład geometrii, wiele tematów zostało pominiętych – na przykład nie ma w ogóle trygonometrii. Zakres materiału został z grubsza dostosowany do programów gimnazjalnych.

Gwoli ścisłości dodam, że w podawanych twierdzeniach kwantyfikator ogólny („dla każdego") występuje często w sposób niejawny – jest w domyśle. Jest to zgodne z tradycją. Na przykład mówiąc, że kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty, mamy na myśli dowolny kąt wpisany oparty na półokręgu.

Spis treści

1 Izometria, jednokładność, podobieństwo **5**

1.1 Przesunięcia, obroty, symetrie osiowe 5

1.2 Izometrie własne figury 7

1.3 Jednokładność i podobieństwo 8

1.4 Zadania 9

2 Podstawowe własności trójkąta **11**

2.1 Kąty i boki trójkątów 11

2.2 Symetralne, dwusieczne 11

2.3 Wysokości 13

2.4 Środkowe 14

2.5 Zadania 17

3 Twierdzenie Pitagorasa **18**

3.1 Twierdzenie Pitagorasa i odwrotne 18

3.2 Uogólnienie na wielokąty podobne 18

3.3 Ekierki 19

3.4 Zadania 20

4 Twierdzenie Talesa **23**

4.1 Twierdzenie Talesa i odwrotne 23

4.2 Równoważność kilku proporcji 24

4.3 Cechy podobieństwa trójkątów 25

4.4 Zadania 27

5 Okrąg i koło **29**

5.1 Kąty wpisane i środkowe 29

5.2 Styczna do okręgu 31

5.3 Zadania 32

6 Wielokąty wpisane w okrąg **34**

6.1 Środek okręgu opisanego na danym wielokącie 34

6.2 Czworokąty wpisane w okrąg 34

6.3 Zadania 37

7 Wielokąty opisane na okręgach **39**

7.1 Środek okręgu wpisanego w dany wielokąt 39

7.2 Czworokąty opisane na okręgach 39

7.3 Zadania 41

8 Konstrukcje **43**

8.1 Konstrukcje wykonalne i niewykonalne 43

8.2 Zadania 44

9 Obwód i pole **45**

9.1 Długość krzywej 45

9.2 Pole figury 46

9.3 Wzór Herona 47

9.4 Zadania 49

10 Zadania różne **50**

11 Podpowiedzi do niektórych zadań **52**

1 Izometria, jednokładność, podobieństwo

Wszystkie przekształcenia, o których mowa w tym rozdziale, są przekszłceniami podzbiorów płaszczyzny na podzbiory płaszczyzny.

1.1 Przesunięcia, obroty, symetrie osiowe

Według znanej definicji

przekształcenie nazywamy izometrią, jeżeli zachowuje odległość, tzn. odległość między obrazami dwóch dowolnych punktów jest równa odległości między tymi punktami.

Z definicji tej wynika od razu, że:

- identyczność jest izometrią,

- izometria jest różnowartościowa, a przekształcenie odwrotne jest też izometrią,

- złożenie izomerii jest izometrią.

Jak wiadomo

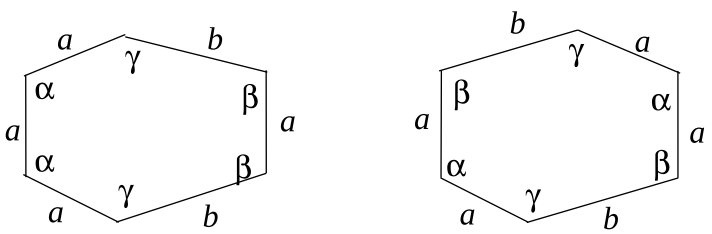
dwie figury nazywamy przystającymi, jeżeli istnieje izometria przekształcająca jedną na drugą.

Z własności izometrii wynika, że przystawanie figur jest relacją typu równoważności, tzn. zwrotną, symetryczną i przechodnią.

Można udowodnić, że

dwa wielokąty są przystające wtedy i tylko wtedy, kiedy kolejne kąty jednego wielokąta są równe kolejnym kątom drugiego, a boki położone między takimi samymi kątami w jednym i drugim wielokącie są równe.

Zauważmy, że nie wystarczy zażądać, aby w jednym i w drugim wielokącie były takie same kąty i boki – istotna jest ich kolejność:

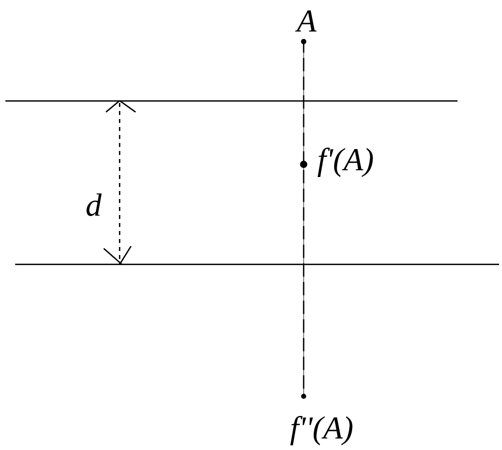


Wielokąty przedstawione na rysunku nie są przystające. Mają takie same kąty i takie same boki, ale nie występują one w tej samej kolejności.

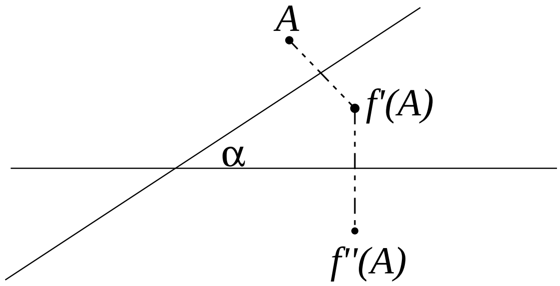
Aby wykazać, że dwa trójkąty są przystające, wystarczy posłużyć się jedną z tzw. cech przystawania trójkątów, które zapewne Czytelnik dobrze pamięta.

Szczególnymi rodzajami izometrii są przesunięcia, obroty i symetrie osiowe (nazywane także odbiciami lustrzanymi). Okazuje się, że te trzy przekształcenia pozwalają otrzymać każdą izometrię – każda izometria jest ich złożeniem.

Co więcej każdą izometrię można otrzymać jako złożenie samych symetrii osiowych, i to najwyżej trzech. W przypadku, kiedy izometria jest przesunięciem lub obrotem – wystarczą dwie. Nietrudno to zobaczyć:



przesunięcie o wektor długości $2d$ jest złożeniem dwóch symetrii, których osie są prostopadłe do wektora przesunięcia i odległe od siebie o d,



obrót o kąt 2α względem punktu S jest złożeniem dwóch symetrii, których osie przecinają się w punkcie S i tworzą kąt α.

Przypomnijmy, że

obrót o 180° *względem punktu* S *nazywamy inaczej symetrią środkową o środku* S.

1.2 Izometrie własne figury

Izometrie własne danej figury geometrycznej są to izometrie przekształcające figurę na siebie.

Oczywiście każda figura ma co najmniej jedną izometrię własną, jest nią identyczność. Z reguły ją pomijamy, wymieniając izometrie własne różnych figur.

Na przykład izometrie własne koła (okręgu) są to wszystkie obroty względem środka oraz symetrie względem jego średnic, a izometriami własnymi prostej są przesunięcia o wektory równoległe do prostej i symetrie środkowe względem wszystkich punktów prostej. Zauważmy, że symetrie środkowe prostej pokrywają się z symetriami osiowymi względem prostych do niej prostopadłych.

Przypomnijmy, że

figurę mającą co najmniej jedną symetrię osiową własną nazywamy osiowosymetryczną, a oś tej symetrii nazywamy osią symetrii figury.

Podobnie

figurę mającą co najmniej jedną symetrię środkową własną nazywamy środkowosymetryczną, a środek tej symetrii nazywamy środkiem symetrii figury.

1.3 Jednokładność i podobieństwo

Jak wiadomo podobieństwo jest przekształceniem zwiększającym lub zmniejszającym długości wszystkich odcinków tyle samo razy. Mówiąc ściśle,

przekształcenie f nazywamy podobieństwem, jeżeli istnieje taka liczba $s > 0$, że $|f(A)f(B)| = s|AB|$ dla każdych dwóch punktów A, B.

Liczbę s nazywamy skalą (inaczej współczynnikiem lub stosunkiem) podobieństwa.

Z definicji natychmiast wynika, że każda izometria jest podobieństwem o skali 1. Ponadto:

- identyczność jest podobieństwem,

- podobieństwo jest różnowartościowe, a przekształcenie odwrotne jest też podobieństwem, przy czym podobieństwo odwrotne do podobieństwa o skali s ma skalę $\frac{1}{s}$.

- złożenie podobieństw jest podobieństwem.

Jak wiadomo

dwie figury nazywamy podobnymi, jeżeli istnieje podobieństwo przekształcające jedną na drugą.

Analogicznie jak przystawanie figur również ich podobieństwo jest relacją typu równoważności.

Można udowodnić, że

dwa wielokąty są podobne wtedy i tylko wtedy, kiedy kolejne kąty jednego wielokąta są równe kolejnym kątom drugiego, a boki położone między takimi samymi kątami w jednym i w drugim wielokącie są propocjonalne.

Szczególnym przypadkiem podobieństwa jest jednokładność, inaczej zwana homotetią. Przypomnijmy, że jeżeli s jest dowolna liczbą dodatnią, to

jednokładnością o środku O i skali s nazywamy takie przekształcenie f, że dla każdego punktu $A \neq O$ punkt $f(A)$ jest współliniowy z punktami A i O, punkt A leży między O i $f(A)$ oraz $|Of(A)| = s|OA|$.

Niekiedy wprowadza się także pojęcie jednokładności o skali ujemnej:

jednokładnością o środku O i skali $s < 0$ nazywamy takie przekształcenie f, że dla każdego punktu $A \neq O$ punkt $f(A)$ jest współliniowy z punktami A i O, punkt O leży między A i $f(A)$ oraz $|Of(A)| = -s|OA|$.

Nietrudno zauważyć, że jednokładność o skali s i środku O jest złożeniem jednokładności o skali $-s$ i środku O oraz symetrii środkowej względem O.

Analogicznie jak w przypadku podobieństwa również skalę jednokładności nazywamy inaczej współczynnikiem lub stosunkiem.

Dwie figury nazywamy jednokładnymi, jeżeli jedna jest obrazem jednokładnym drugiej.

Tak jak przystawanie i podobieństwo również jednokładność figur jest relacją typu równoważności.

Oczywiście figury jednokładne są podobne, ale nie na odwrót. Jako przykład wystarczy wziąć dwa trójkąty podobne (na przykład przystające), których boki nie są równoległe.

Podobieństwo figur zależy tylko od ich własności wewnętrznych, natomiast na jednokładność wpływa także ich położenie na płaszczyźnie.

Jak wiadomo

każde podobieństwo jest złożeniem izometrii i jednokładności.

Zatem dwie figury są podobne, jeżeli istnieje trzecia figura przystająca do jednej z nich i jednokładna do drugiej.

1.4 Zadania

1. Wykazać, że trójkąt ma oś symetrii wtedy i tylko wtedy, kiedy jest równoramienny.

2. Dowieść, że jeżeli trójkąt ma trzy osie symetrii, to jest równoboczny.

3. Wymienić izometrie własne trójkąta równobocznego.

4. Posługując się pojeciem symetrii osiowej, zdefiniować:

a) symetralną odcinka, b) dwusieczną kąta.

5. Zbadać, czy następujące figury mają osie symetrii:

a) dwie proste, b) dwa okręgi, c) prosta i okrąg.

6. Wykazać, że czworokąt jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, kiedy ma środek symetrii.

*7. Wykazać, że figura ograniczona ma co najwyżej jeden środek symetrii.

8. Wykazać, że wielokąt o nieparzystej liczbie wierzchołków nie ma środka symetrii.

9. Wykazać, że złożenie dwóch symetrii osiowych, których osie są prostopadłe, jest symetrią środkową.

*10. Dana jest prosta i dwa punkty A i B poza nią. Znaleźć na prostej taki punkt C, aby suma odległości $|AC| + |BC|$ była najmniejsza.

11. Dane są trzy punkty niewspółliniowe A, B i C, przy czym $|AB| = |BC| \neq |AC|$. Znaleźć taki punkt D, aby figura $ABCD$ miała oś symetrii. Ile jest rozwiązań?

12. Dane są dwa okręgi o równych promieniach. Jak dobudować trzeci, aby figura miała:
a) oś symetrii, b) środek symetrii?

13. Znaleźć symetrie własne figury składającej się z dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią.

2 Podstawowe własności trójkąta

2.1 Kąty i boki trójkątów

Jak wiadomo

suma kątów trójkąta jest równa 180°.

Stąd wynika, że mamy trzy możliwości:

- wszystkie kąty trójkąta są ostre,

- dokładnie jeden kąt trójkąta jest rozwarty,

- dokładnie jeden kąt trójkąta jest prosty.

Trójkąt, który ma co najmniej dwa kąty równe, jest równoramienny, a trójkąt, który ma wszystkie kąty równe, jest równoboczny.

Równość trzech kątów trójkąta pociąga za soba równość trzech jego boków, i odwrotnie. Tak oczywiście nie jest w innych wielokątach: z równości kątów nie wynika równość boków, ani z równości boków nie wynika równość kątów. Przypomnijmy, że

wielokąt, który ma równe boki i równe kąty nazywamy foremnym.

Trójkąty foremne są to dokładnie trójkąty równoboczne.

Twierdzenie o sumie kątów trójkąta pozwala obliczyć sumę kątów dowolnego n-kąta. Jest ona równa $(n-2)\cdot 180°$.

Dowód tego jest natychmiastowy w przypadku wielokątów wypukłych, natomiast dla wielokątów wklęsłych jest dosyć skomplikowany.

Twierdzenie o sumie kątów trójkąta pozwala wyznaczyć jego kąt, jeżeli dane są dwa pozostałe. Z bokami tak nie jest, dwa boki nie wyznaczają trzeciego. Wiadomo tylko, że jest on dłuższy niż dwa pozostałe w sumie:

każdy bok trójkąta jest większy od sumy dwóch pozostałych.

Własność ta nosi nazwę *warunku trójkąta.*

2.2 Symetralne, dwusieczne

Jak wiadomo

(1) *symetralne boków trójkąta mają punkt wspólny.*

Istotnie, niech A, B, C będą wierzchołkami trójkąta i niech P będzie punktem wspólnym symetralnych boków AB i BC. Taki punkt istnieje, bo symetralne odcinków nierównoległych przecinają się. Ponieważ

$$|AP| = |PB| \quad \text{i} \quad |BP| = |PC|,$$

więc z przechodniości relacji równości wynika, że

$$|AP| = |PC|,$$

a to oznacza, że P jest także punktem symetralnej boku AC.

W analogiczny sposób, rozpatrując odległości od boków trójkąta, dowodzimy, że

(2) *dwusieczne kątów trójkąta mają punkt wspólny.*

Z własności (1) wynika, że dla każdego trójkąta

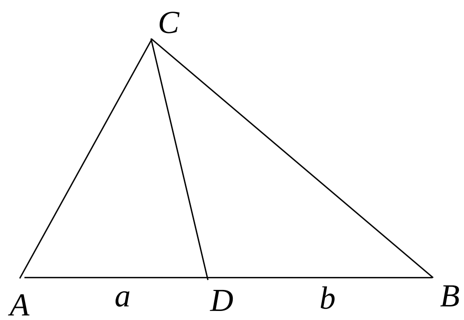
istnieje punkt równo oddalony od wierzchołków,

a z własności (2) wynika, że w każdym trójkącie

istnieje punkt równo oddalony od boków.

Na zakończenie udowodnimy pewną własność dwusiecznej, która przydaje się przy rozwiązywaniu zadań.

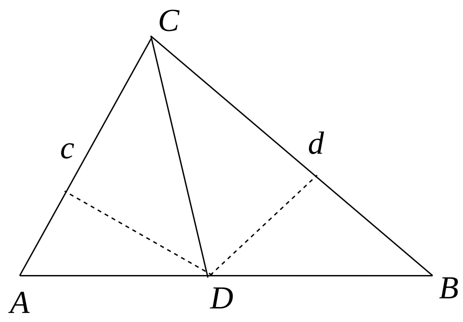
Zauważmy, że dla dowolnego odcinka CD łączącego wierzchołek trójkąta ABC z przeciwległym bokiem



trójkąty ADC i DBC mają takie same wysokości, jeżeli za podstawy przyjąć odcinki a i b. Zatem

$$\frac{\text{pole trójkąta } ADC}{\text{pole trójkąta } DBC} = \frac{a}{b}.$$

Jeżeli odcinek CD jest dwusieczną kąta w trójkącie ABC, to



trójkąty ADC i DBC mają takie same wysokości, jeżeli za podstawy przyjąć odcinki c i d. Zatem

$$\frac{\text{pole trójkąta } ADC}{\text{pole trójkąta } DBC} = \frac{c}{d}.$$

W konsekwencji

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Oznacza to, że

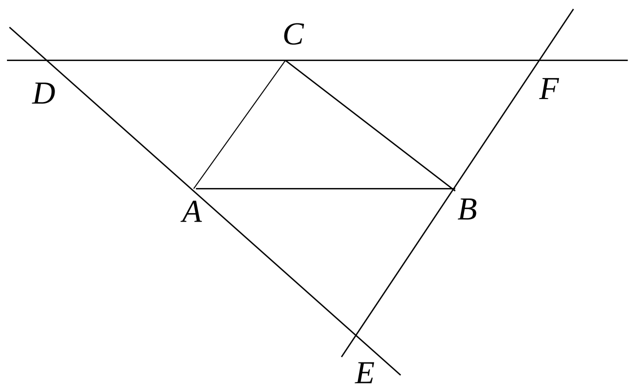
dwusieczna kąta w trójkącie dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do pozostałych boków trójkąta.

2.3 Wysokości

Z własności (1) wynika również, że

wysokości trójkąta lub ich przedłużenia mają punkt wspólny.

Istotnie, rozważmy dowolny trójkąt ABC. Przez każdy jego wierzchołek poprowadźmy prostą równoległą do przeciwległego boku. W ten sposób powstanie nowy trójkąt; oznaczmy jego wierzchołki literami D, E, F:



Ponieważ czworokąty $ABCD$ i $ABFC$ są równoległobokami, a w równoległobokach boki równoległe są równe, więc $DC = AB = CF$. Analogicznie $DA = CB = AE$ i $EB = AC = BF$. Oznacza to, że wierzchołki trójkąta ABC są środkami boków trójkąta DEF. Zatem wysokości trójkąta ABC są zawarte w symetralnych boków trójkąta DEF, a a te ostatnie mają punkt wspólny.

Rysunek został sporządzony w przypadku trójkąta ostrokątnego, ale rozumowanie nie zależy od rodzaju trójkąta. Twierdzenie jest więc udowodnione.

Można wykazać, że jeżeli trójkąt jest ostrokątny, to przecinają sie jego wysokości, a jeżeli trójkąt jest rozwartokątny, to przecinają się przedłużenia wysokości. W pierwszym przypadku punkt przecięcia leży wewnątrz trójkąta, a w drugim na zewnątrz.

Jeżeli natomiast trójkąt jest prostokątny, to punktem wspólnym jego wysokości jest wierzchołek przeciwległy do przeciwprostokątnej.

Przypomnijmy, że punkt wspólny wysokości lub ich przedłużeń nazywamy *ortocentrum.*

2.4 Środkowe

Przypomnijmy, że

środkowa jest to odcinek łączący środek boku trójkąta z przeciwległym wierzchołkiem.

Zauważmy, że

środkowa dzieli trójkąt na dwa trójkąty o równych polach.

Dowiedziemy, że

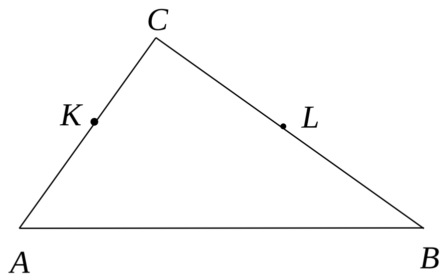
(3) *środkowe boków trójkąta mają punkt wspólny, przy czym dzieli on każdą środkową w stosunku* $1:2$.

Skorzystamy z własności, że

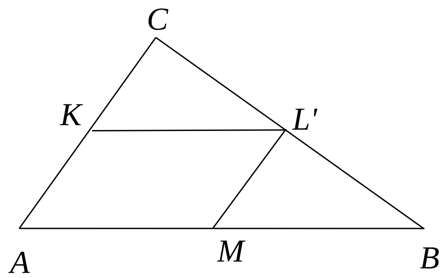
(4) *odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i równy jego połowie.*

Własność ta jest konsekwencją twierdzenia Talesa, ale może być dowiedziona także bezpośrednio.

Istotnie, rozważmy dowolny trójkąt ABC i załóżmy, że K jest środkiem boku AC, a L jest środkiem boku CB:

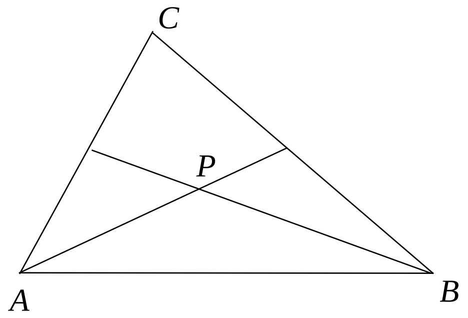


Poprowadźmy odcinek KL' równoległy do boku AB i odcinek $L'M$ równoległy do boku AC:

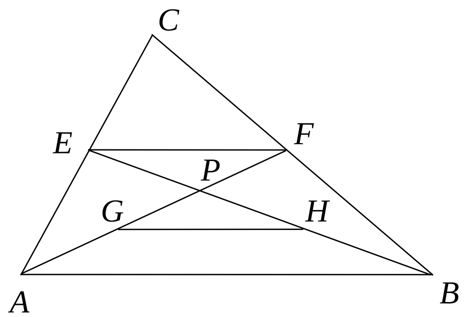


Zatem $|KC| = |AK| = |L'M|$. Trójkąty $KL'C$ i MBL' mają więc po jednym boku równym, a ponieważ mają równe kąty, więc są przystające. Stąd wynika, że $|CL'| = |L'B|$. Zatem $L = L'$, co kończy dowód (4).

Aby dowieść własności (3), rozważmy dwie dowolne środkowe trójkąta ABC, oznaczając ich wspólny punkt literą P:



Niech punkty E i F będą środkami boków AC i BC, a punkty G i H – środkami odcinków AP i PB:



Z (4) wynika, że trójkąty EPF i PGH mają równe kąty oraz $|EF| = \frac{1}{2}|AB| = |GH|$. Zatem trójkąty te są przystające. W konsekwencji

$$|AP| = 2|PF| \quad \text{i} \quad |BP| = 2|PE|.$$

Oznacza to, że każda środkowa dzieli każdą inną środkową na dwa odcinki, których stosunek wynosi 1 : 2.

Niech teraz s_1, s_2 i s_3 będą środkowymi trójkąta. Ponieważ zarówno punkt wspólny środkowych s_1 i s_2, jak i punkt wspólny środkowych s_2 i s_3 dzielą środkową s_2 w takim samym stosunku, więc punkty te pokrywają się. Oznacza to, że wszystkie środkowe mają punkt wspolny.

Przypomnijmy, że punkt wspólny środkowych jest *środkiem ciężkości* trójkąta.

2.5 Zadania

1. Obliczyć kąt n–kąta foremnego.

2. Czy istnieje wielokąt foremny o kącie $125°$?

3. Uzasadnić, że startując z dowolnego punktu okręgu i odmierzając w znany sposób odcinek równy promieniowi koła wrócimy po sześciu razach do punktu wyjścia.

*4. Udowodnić, że nie istnieje trójkąt o wysokościach 1, 2 i 3.

5. Wykazać, że dwusieczne kątów przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe.

6. Dowieść, że jeżeli w trójkącie środkowa jednego z boków pokrywa się z dwusieczną przeciwległego kąta, to trójkąt jest równoramienny.

7. Wysokość trójkąta dzieli podstawę na pół i jest od niej dwa razy krótsza. Dowieść, że trójkąt jest prostokątny.

8. W jakich trójkątach długość środkowej jednego z boków jest równa połowie długości tego boku?

9. Wykazać, że dwa wierzchołki dowolnego trójkąta są równo oddalone od prostej zawierającej środkową boku je łączącego.

10. Czy dwusieczne dwóch kątów trójkąta mogą przecinać się pod kątem prostym?

*11. Uczeń twierdzi, że jeżeli podstawę trójkąta równoramiennego podzielić na trzy równe części i punkty podziału połączyć z wierzchołkiem, to w ten sposób kąt przy wierzchołku zostanie podzielony na trzy równe części. Czy ma rację? Odpowiedź uzasadnić.

3 Twierdzenie Pitagorasa

3.1 Twierdzenie Pitagorasa i odwrotne

Twierdzenie Pitagorasa jest chyba najbardziej znanym twierdzeniem spośród wszystkich twierdzeń, które są w programach szkolnych. Można je formułować jako związek między bokami trójkąta prostokątnego lub związek między polami kwadratów zbudowanych na tych bokach.

Jak wiadomo twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa jest również prawdziwe. Aby je podać, dobrze jest sformułować twierdzenie Pitagorasa, nie używając nazw boków trójkąta prostokątnego – na przykład tak:

jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów pewnych (lub: krótszych) dwóch jego boków jest równa kwadratowi trzeciego (lub: najdłuższego) boku.

Jest wiele rozmaitych dowodów twierdzenia Pitagorasa i można je bez trudu znaleźć nawet w podręcznikach gimnazjalnych. Natomiast niełatwo znaleźć dowód twierdzenia odwrotnego.

Dowód ten jest prosty i krótki. Istotnie, załóżmy, że boki a, b, c pewnego trójkąta T spełniają równość

(*) $\quad a^2 + b^2 = c^2$

i rozważmy trójkąt prostokątny T' o przyprostokątnych a, b. Oznaczmy jego przyprostokatną literą x. Wtedy na mocy twierdzenia Pitagorasa zachodzi związek $a^2 + b^2 = x^2$, co wobec (*) pociąga za sobą równość $x = c$. Oznacza to, że trójkąt T' jest przystający do trójkata T. W konsekwencji trójkąt T jest prostokątny.

3.2 Uogólnienie na wielokąty podobne

Twierdzenie Pitagorasa ma różne uogólnienia. W jednym z nich kwadraty na bokach trójkąta prostokątnego zastępujemy dowolnymi wielokątami podobnymi, przy czym skala podobieństwa jest równa stosunkowi odpowiednich boków trójkąta:

jeżeli wielokąty W_1, W_2, W_3 są podobne w skali $a : b : c$, gdzie a, b, c są odpowiednio przyprostokątnymi i przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, to suma pól wielokątów W_1 i W_2 jest równa polu wielokąta W_3.

Dowód jest nietrudny. Istotnie, jeżeli oznaczymy pola wielokątów odpowiednio P_1, P_2, P_3, to $P_1 : P_2 : P_3 = a^2 : b^2 : c^2$. Zatem

$$\frac{P_1}{P_3} = \frac{a^2}{c^2} \quad \text{oraz} \quad \frac{P_2}{P_3} = \frac{b^2}{c^2}.$$

Stąd po dodaniu stronami otrzymujemy

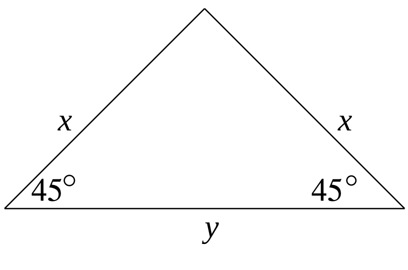
$$\frac{P_1 + P_2}{P_3} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

W konsekwencji z twierdzenia Pitagorasa wynika równość

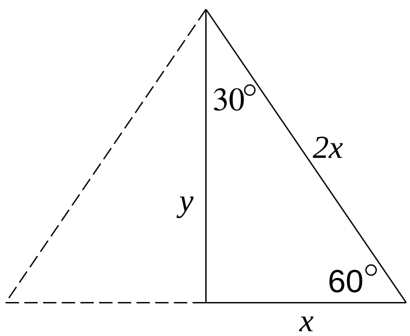
$$P_1 + P_2 = P_3.$$

3.3 Ekierki

Twierdzenie Pitagorasa pozwala obliczyć bok trójkąta prostokątnego, jeżeli dane są dwa pozostałe boki. W przypadku trójkąta prostokątnego z kątami ostrymi 45° lub 30° i 60° wystarczy znać jeden bok, aby na podstawie twierdzenia Pitagorasa móc obliczyć dwa pozostałe. Wynika to stąd, że w pierwszym trójkącie przyprostokątne sa równe:



a w drugim jedna przyprostokątna jest połową przeciwprostokątnej:



Znając zatem x, obliczymy y, i na odwrót. Nie trzeba tu posługiwać się funkcjami trygonometrycznymi.

Trójkąty, o których mowa, nazywane są popularnie ekierkami. Nazwa wzięła się stąd, że owe przybory geometryczne mają kształt właśnie takich trójkątów.

3.4 Zadania

1. Z jakiego twierdzenia trzeba skorzystać, aby rozstrzygnąć, czy trójkąt o bokach:

a) 5, 7, 8   b) 10, 11, 12

jest prostokątny?

2. Uczeń rozumuje:
Liczby 2, 3, 4 nie są długościami boków trójkąta prostokątnego. Wynika to z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa: jeżeli suma kwadratów dwóch liczb jest równa kwadratowi trzeciej liczby, to liczby te są długościami boków trójkąta prostokątnego. W naszym przypadku założenie tego ostatniego twierdzenia nie jest spełnione, a więc także i teza nie jest spełniona.
Czy rozumowanie ucznia jest poprawne?

3. Uczeń pisze:
Trójkąt o bokach 3, 4, 5 jest prostokątny, bo $3^2 + 4^2 = 5^2$, a jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej.
Czy wnioskowanie to jest poprawne?

4. Uczeń pisze:
Trójkąt o bokach 3, 4, 6 nie jest prostokątny, bo $3^2 + 4^2 \neq 6^2$, a jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej.
Czy wnioskowanie to jest poprawne?

5. Ile jest trójkątów prostokątnych, których boki są kolejnymi liczbami naturalnymi?

6. Ile jest trójkątów prostokątnych, których boki są kolejnymi liczbami parzystymi?

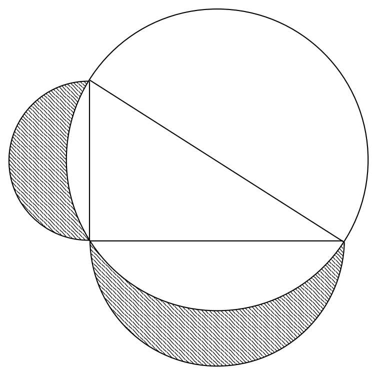
7. Ile jest trójkątów prostokątnych, których boki są kolejnymi liczbami nieparzystymi?

8. Dowieść, że w rombie suma kwadratów przekątnych jest cztery razy większa od kwadratu boku.

9. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, udowodnić, że suma pól trójkątów równobocznych zbudowanych na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa polu trójkąta równobocznego zbudowanego na przeciwprostokątnej.

*10. Udowodnić, że w twierdzeniu Pitagorasa kwadraty na bokach trójkąta można zastąpić dowolnymi n-kątami foremnymi: suma pól n-kątów foremnych zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu n-kąta foremnego zbudowanego na przeciwprostokątnej.

*11. Dany jest dowolny trójkąt prostokątny. Rysujemy okrąg, którego średnicą jest przeciwprostokątna i dwa półokręgi, których średnicami są przyprostokątne. W ten sposób tworzą się tzw. księżyce Hipokratesa:



Dowieść, że suma pól księżyców Hipokratesa jest równa polu trójkąta.

Przypominam, że w zadaniach dotyczących ekierek nie posługujemy się funkcjami trygonometrycznymi!

12. Jeden z kątów trójkąta prostokątnego wynosi 30° lub 45°, a jeden z boków jest równy a. Znaleźć dwa pozostałe boki, rozważając wszystkie możliwe przypadki.

*13. Przekątne równoległoboku tworzą kąt $60°$, a ich długości są równe 4 i 8. Obliczyć obwód równległoboku.

*14. Dwa boki trójkąta sa równe 4 i 6 i tworzą kąt $45°$. Obliczyć pole tego trójkąta.

*15. Dwa boki trójkąta mają są równe 4 i 5 i tworzą kąt $30°$. Obliczyć pole tego trójkąta.

16. Obliczyć pole trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa wynosi 5, ramię wynosi 4, a kąt ostry ma $60°$.

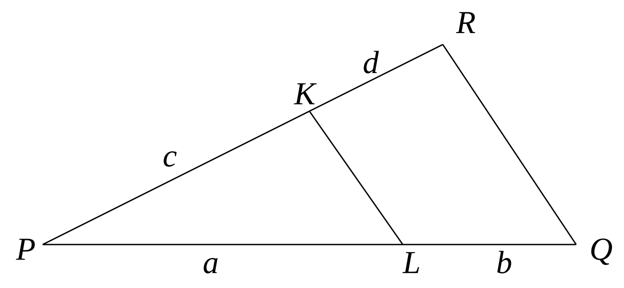
17. W trójkącie równoramiennym jest kąt $120°$, a wysokośc poprowadzona z wierzchołka tego kąta wynosi $\sqrt{5}$. Obliczyć boki trójkąta.

4 Twierdzenie Talesa

4.1 Twierdzenie Talesa i odwrotne

Twierdzenie Talesa ma wiele równoważnych sformułowań. Oto jedno z nich, pochodzące z „Elementów” Euklidesa.

Odcinek łączący dwa boki trójkąta i równoległy do trzeciego boku dzieli boki tego trójkąta w jednakowym stosunku:

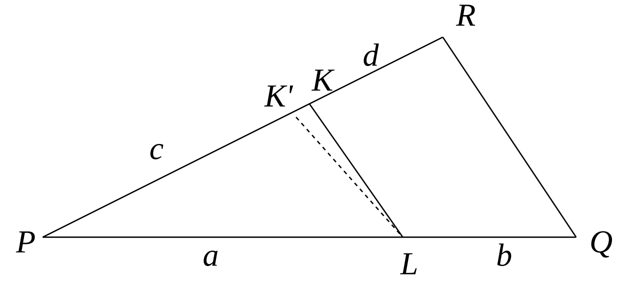


jeżeli $KL||RQ$, *to*

(1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Prosty dowód tego twierdzenia, w którym porównuje się pola pewnych trójkątów, można również znaleźć w „Elementach”.

Zauważmy, że z twierdzenia Talesa natychmiast wynika twierdzenie do niego odwrotne. Istotnie, załóżmy nie wprost, że równość (1) jest spełniona, a odcinek KL nie jest równoległy do boku RQ. Istnieje wtedy taki punkt K' na boku PR, że $K'L||RQ$:



Wtedy na mocy twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$\frac{a}{b} = \frac{|PK'|}{|K'R|},$$

co jest sprzeczne z (1).

4.2 Równoważność kilku proporcji

Zauważmy, że równość (1) jest równoważna każdej z dwóch równości

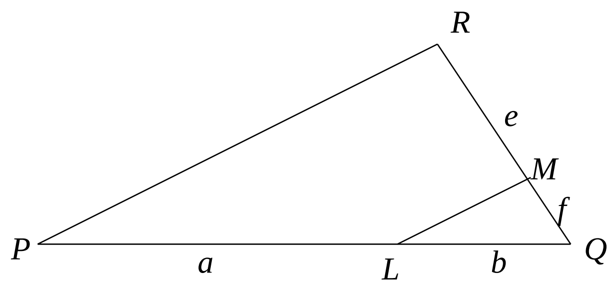
(2) $\quad \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{c}{c+d},$

(3) $\quad \dfrac{b}{a+b} = \dfrac{d}{c+d},$

co można łatwo sprawdzić „mnożeniem na krzyż".

Mamy zatem różne możliwości sformułowania tezy twierdzenia Talesa.

Ponadto stosując twierdzenie Talesa do odcinka LM równoległego do boku PR



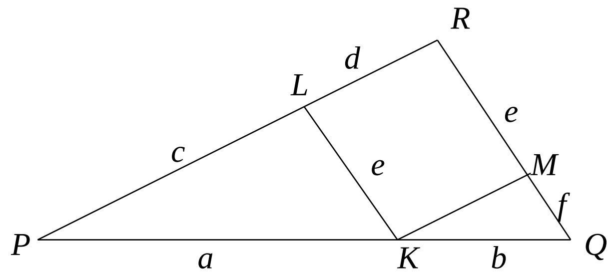
i formułując tezę w postaci równosci typu (3), otrzymamy

$$\frac{a}{a+b} = \frac{e}{e+f}.$$

Stąd i z (2) wynika, że

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{e}{e+f}.$$

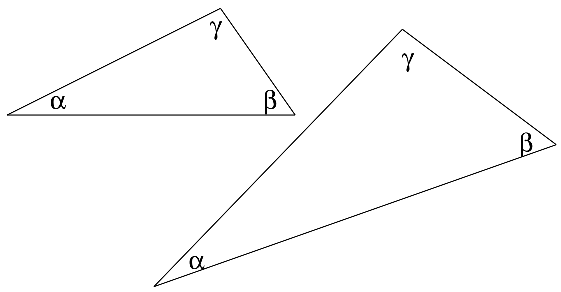
Oznacza to, że boki trójkąta PLK są proporcjonalne do boków trójkąta PQR:



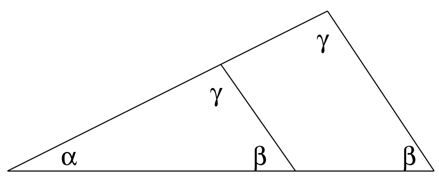
Mamy więc jeszcze jedną postać tezy twierdzenia Talesa.

4.3 Cechy podobieństwa trójkątów

Także założenie twierdzenia można sformułować inaczej, rozważając trójkąty o równych kątach. Jeżeli bowiem dwa trójkąty mają równe kąty



to istnieje izometria przeprowadzająca mniejszy trójkąt w większy tak, aby były położone jak na rysunku:



Zatem twierdzenie Talesa można w sposób równoważny sformułować tak:

jeżeli dwa trójkąty mają równe kąty, to ich boki są proporcjonalne.

Twierdzenie odwrotne ma wtedy postać:

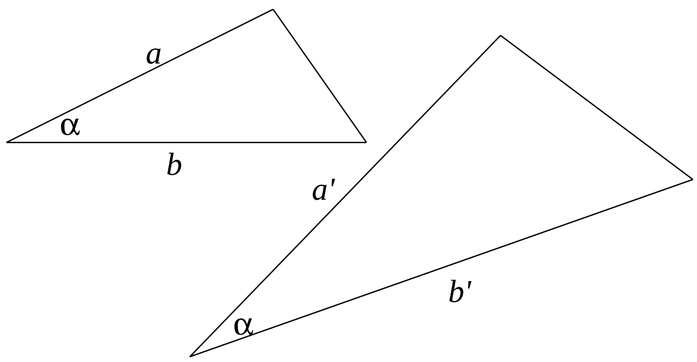
jeżeli dwa trójkąty mają boki proporcjonalne, to mają równe kąty.

Z tych dwóch twierdzeń wynika, że do podobieństwa trójkątów wystarcza równość ich kątów lub proporcjonalność boków. Są to dwie spośród trzech cech podobieństwa trójkątów.

Trzecia cecha podobieństwa jest następująca:

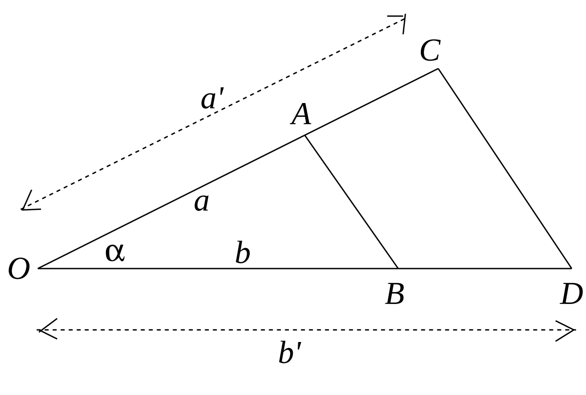
jeżeli dwa trójkąty mają taki sam kąt, a boki ten kąt tworzące w jednym i w drugim trójkącie są proporcjonalne, to te trójkąty są podobne.

Istotnie, załóżmy, że boki trójkątów



spełniają równość $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$.

Przekształćmy mniejszy trójkąt w większy przez izometrię – tak jak na rysunku:

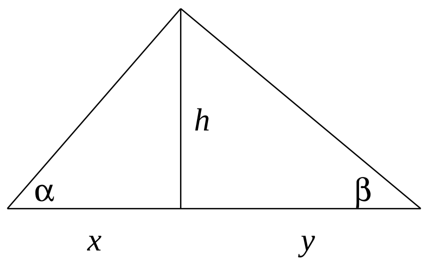


Wtedy $AB||CD$. W konsekwencji kąty mniejszego trójkąta są równe kątom większego.

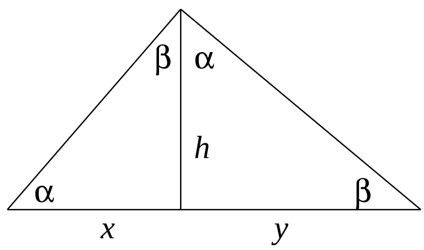
Z pierwszej cechy podobieństwa trójkątów wynika, że

jeżeli trójkąty prostokątne mają taki sam kąt ostry, to są podobne.

Wyprowadzimy stąd pewien wniosek dotyczący jednej z wysokości trójkąta prostokątnego – tej, która jest opuszczona na przeciwprostokątną. Wysokość ta dzieli trójkąt na dwa trójkąty prostokątne:



Ponieważ $\alpha + \beta = 90°$, więc pozostałe kąty są takie jak na rysunku:



Zatem trójkąty te są podobne. Z proporcjonalności odpowiednich boków wynika, że $\frac{h}{x} = \frac{y}{h}$, skąd

$$h = \sqrt{xy}.$$

Oznacza to, że

wysokość trójkąta prostokątnego opuszczona na przeciwprostokątną jest średnią proporcjonalną (inaczej: geometryczną) dwóch odcinków, na które ją dzieli.

4.4 Zadania

1. Udowodnić, że odcinki równoległe do podstaw trapezu i łączące punkt przecięcia jego przekątnych z bokami trapezu są równe.

2. Gimnazjalista rozwiązuje zadanie:

Czy trójkąty o bokach:

a) 3, 4, 5 *i* 15, 20, 25

b) 3, 4, 6 *i* 9, 12, 17

mają równe kąty?

Pisze odpowiedź:

a) *Tak, bo boki są proporcjonalne, a wiadomo, że jeżeli kąty są równe, to boki są proporcjonalne.*

b) *Nie, bo boki nie są proporcjonalne, a jeżeli kąty są równe, to boki są proporcjonalne.*

Czy odpowiedź jest poprawna?

3. Podstawy trapezu mają długości 3 i 7, a jego pole wynosi 25. Obliczyć:
a) odległość punktu przecięcia przekątnych od krótszej podstawy,
b) długość odcinka przechodzącego przez punkt przecięcia przekątnych i równoległego do podstaw trapezu.

4. W trójkącie równobocznym o boku a umieszczono kwadrat tak, że dwa wierzchołki kwadratu leżą na jednym boku trójkąta, a pozostałe dwa na różnych. Obliczyć pole tego kwadratu.

5. Udowodnić, że jeżeli odcinek łączący dwa boki trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i jeden koniec odcinka pokrywa się ze środkiem odpowiedniego boku, to drugi koniec też.

6. Udowodnić, że odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i równy jego połowie.

7. W trojkącie ABC wysokość CD wynosi 5, $|AD| = 4$ i $|DB| = 8$. Obliczyć długość odcinka równoległego do CD, ktorego końce leżą na bokach trójkąta i który dzieli trójkąt ABC na dwie figury o równych polach.

*8. Udowodnić, że środki boków dowolnego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku.

*9. Dowieść, że odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do jego podstaw i równy ich średniej arytmetycznej.

5 Okrąg i koło

5.1 Kąty wpisane i środkowe

Niech będzie dane dowolne koło. Według definicji

kąt wpisany jest to kąt między cięciwami wychodzącymi z tego samego punktu,

kąt środkowy jest to kąt między promieniami.

Wiemy, że

kąt wpisany jest dwa razy mniejszy od kąta środkowego opartego na tym samym łuku.

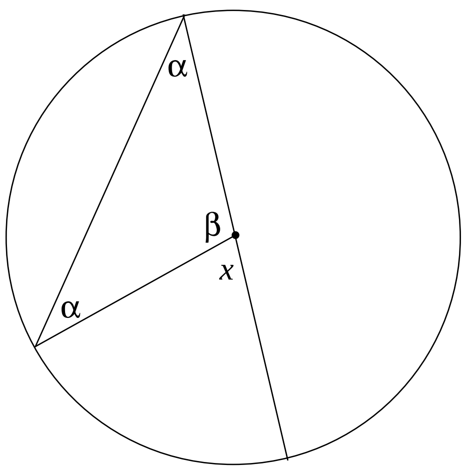
Przypomnijmy dowód tego twierdzenia, rozważając trzy różne położenia kąta wpisanego względem środka koła:

- środek koła leży na ramieniu kąta wpisanego,

- środek koła leży wewnątrz kąta wpisanego,

- środek koła leży na zewnątrz kąta wpisanego.

W pierszym przypadku mamy



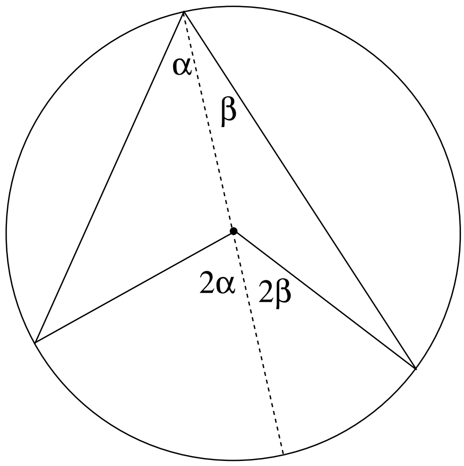
$$x + \beta = 180°, \qquad 2\alpha + \beta = 180°,$$

skąd

$$x = 2\alpha.$$

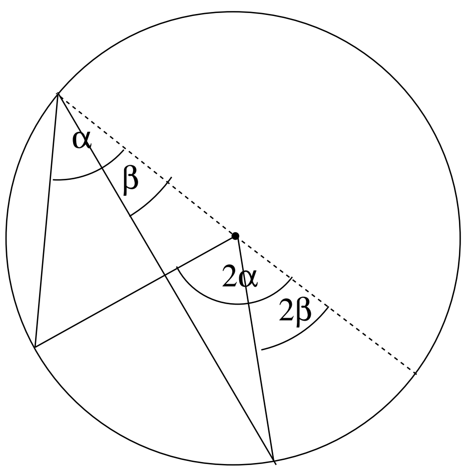
Dwa pozostałe przypadki sprowadzimy do pierwszego, prowadząc z wierzchołka kąta wpisanego średnicę koła. Przyjmując oznaczenia jak na rysunkach, widzimy, że:

- w drugim przypadku



kąt wpisany jest równy $\alpha + \beta$, a odpowiadający mu kąt środkowy jest równy $2\alpha + 2\beta$,

- w trzecim przypadku



kąt wpisany jest równy $\alpha - \beta$, a odpowiadający mu kąt środkowy jest równy $2\alpha - 2\beta$.

Z udowodnionego twierdzenia wynika natychmiast, że

kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe.

Własność tę można uogólnić:

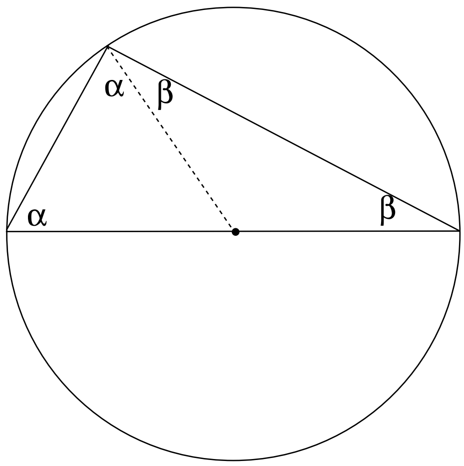
kąty są równe wtedy i tylko wtedy, kiedy są oparte na równych łukach.

Istotnie, równość kątów wpisanych jest równoważna równości odpowiadających im kątów środkowych, a kąty środkowe są równe wtedy i tylko wtedy, kiedy są oparte na równych łukach.

Z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym wynika też, że

kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty.

Własność tę można udowodnić także bezpośrednio, korzystając z twierdzenia o sumie kątów trójkąta:



$2\alpha + 2\beta = 180°$, skąd $\alpha + \beta = 90°$.

5.2 Styczna do okręgu

W wielu zadaniach korzystamy z własności, że

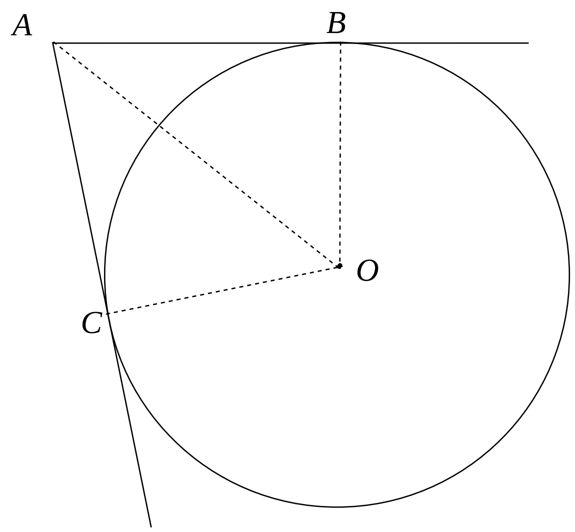
styczna do okręgu jest prostopadła do promienia wychodzącego z punktu styczności.

Wynika to z symetrii osiowej figury złożonej z okręgu i stycznej do niego. Istotnie, niech k będzie prostą styczną do okręgu w punkcie P, a l prostą prostopadła do k i przechodząca przez środek okręgu. Symetria względem l przeprowadza okrąg na siebie, a prostą k też na siebie. Stąd wynika, że punkt wspólny prostej k i okregu przechodzi na punkt wspólny prostej k i okręgu, a ponieważ P jest jedynym punktem wspólnym prostej k z okręgiem, więc jest on punktem stałym symetrii. Zatem P leży on na osi symetrii, co oznacza, że prosta l przechodzi przez punkt styczności. W konsekwencji promień wychodzacy z punktu styczności jest zawarty w l, co kończy dowód.

Często też korzystamy z własności, że

jeżeli A jest punktem wspólnym dwóch stycznych do tego samego okręgu, a B i C są punktami styczności, to $|AB| = |AC|$.

Jest to natychmiastowa konsekwencja tego, że



trójkąty ABO i ACO są prostokątne i mają po dwa boki równe (w tym jeden wspólny), a wiec są przystające.

5.3 Zadania

1. Czy przez każde trzy punkty przechodzi okrąg? Czy ustalone trzy punkty mogą leżeć na więcej niż jednym okręgu?

2. Wykazać, że kąt między styczną i cięciwą okręgu poprowadzoną z punktu styczności jest równy połowie kąta środkowego opartego na łuku wyznaczonym przez cięciwę – tym, który leży między cięciwą a styczną.

3. Udowodnić, że średnica koła połowi cięciwę wtedy i tylko wtedy, kiedy jest do niej prostopadła.

4. Przez punkt styczności dwóch okręgów prowadzimy prostą przecinającą jeden okrąg w punkcie P, a drugi w punkcie Q. Udowodnić, że styczne do okręgów w punktach P i Q są równoległe.

*5. Udowodnić, że dla dowolnego trójkąta ABC okrąg o średnicy AB przecina okrąg o średnicy AC w punkcie leżącym na prostej BC.

*6. Zbadać, w jakich trójkątach symetralne boków przecinają się w punkcie leżącym:
a) na zewnątrz trójkąta,
b) na boku trójkąta,
c) wewnątrz trójkąta.

7. W koło wpisano dwa trapezy o bokach odpowiednio równoległych. Udowodnić, że przekątne jednego trapezu są równe przekątnym drugiego trapezu.

*8. Z punktu O leżącego na zewnątrz koła poprowadzono dwie sieczne. Jedna sieczna przecina okrąg w punktach A i A', a druga w punktach B i B', przy czym A leży między A' i O, a B leży między B' i O. Dowieść, że $|OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'|$.

6 Wielokąty wpisane w okrąg

Uwaga. Określenie „wielokąt wpisany w okrąg” możemy zastąpić określeniem „wielokąt wpisany w koło”. Zamiast mówić, że „wielokąt jest wpisany w okrąg (w koło)” możemy powiedzieć, że „okrąg (koło) jest opisany (opisane) na wielokącie”.

6.1 Środek okręgu opisanego na danym wielokącie

Zgodnie z definicją,

wielokąt nazywamy wpisanym w okrąg (w koło), jeżeli wszystkie jego wierzchołki leżą na pewnym okręgu.

Jeżeli zatem wielokąt jest wpisany w okrąg, to środek okręgu jest punktem równo oddalonym od wszystkich jego wierzchołków - jest więc punktem wspólnym symetralnych wszystkich boków wielokąta.

Stąd wynika, że

wielokąt jest wpisany w okrąg wtedy i tylko wtedy, kiedy symetralne wszystkich jego boków mają punkt wspólny.

W szczególności (zob. s. 11)

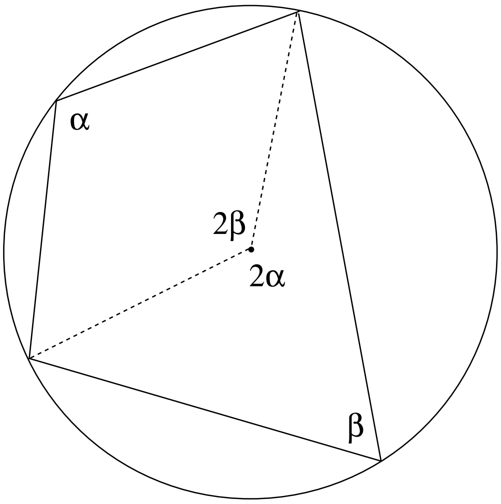
każdy trójkąt jest wpisany w okrąg.

6.2 Czworokąty wpisane w okrąg

Do rozstrzygnięcia, czy dany czworokąt jest czy nie jest wpisany w okrąg, służy znane kryterium dotyczące kątów czworokąta. Jak wiadomo,

czworokąt jest wpisany w okrąg wtedy i tylko wtedy, kiedy suma przeciwległych kątów jest równa $180°$.

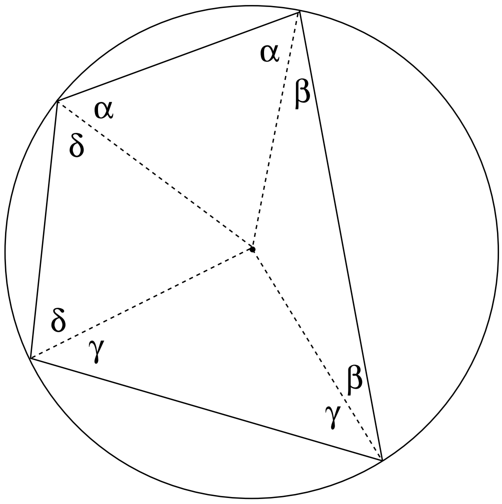
Implikacja w jedną stronę jest konsekwencją twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym. Jeżeli bowiem czworokąt jest wpisany w okrąg o środku S, to



$$2\alpha + 2\beta = 360°, \quad \text{skąd} \quad \alpha + \beta = 180°.$$

Równość ta jest prawdziwa także w przypadku, kiedy środek okręgu leży na zewnątrz wielokąta lub na jego brzegu – sporządzenie odpowiednich rysunków zostawiam Czytelnikowi.

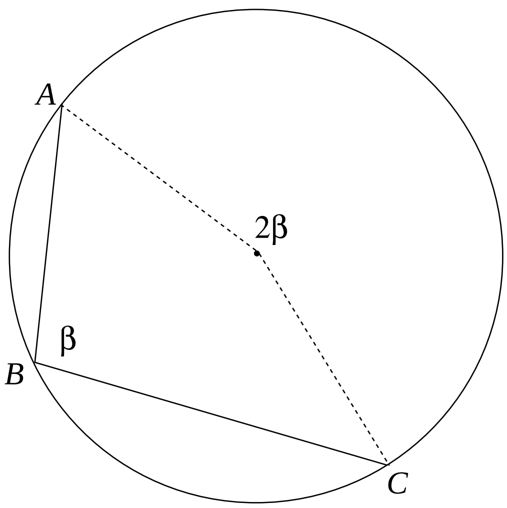
Zauważmy, że implikacji tej można też dowieść inaczej, nie korzystając z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym. Wystarczy zauważyć, że trójkąty powstałe przez połączenie środka okręgu z wierzchołkami wielokąta są równoramienne i skorzystać z tego, że suma kątów czworokąta jest równa 360°. W przypadku, kiedy środek okręgu leży wewnątrz czworokąta mamy



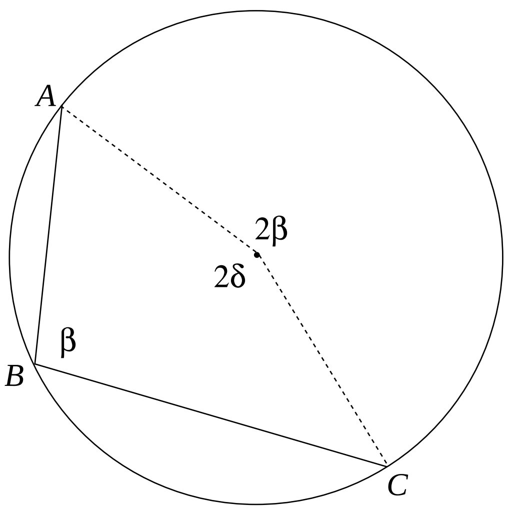
$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ, \quad \text{skąd} \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ.$$

Pozostałe przypadki pozostawiam do rozpatrzenia Czytelnikowi.

Aby dowieść implikacji odwrotnej, załóżmy, że suma kątów przeciwległych czworokąta $ABCD$ wynosi 180° i rozważmy okrąg przechodzący przez trzy jego wierzchołki:



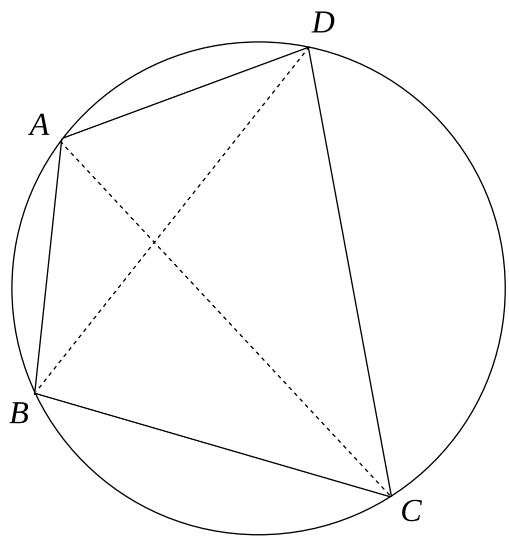
Oznaczając przez δ kąt czworokąta przy wierzchołku D, mamy z założenia równość $\beta+\delta = 180^\circ$. Stąd $2\beta+2\delta = 360^\circ$, więc 2δ jest miarą kąta środkowego przedstawionego na rysunku:



W konsekwencji δ jest kątem wpisanym opartym na łuku ABC. Zatem wierzchołek D leży na tym samym okregu, co wierzchołki A, B, C.

Na zakończenie wspomnę jeszcze o jednym kryterium opisywalności okręgu na czworokącie, mianowicie o twierdzeniu Ptolemeusza. Mówi ono, że

czworokąt jest wpisany w okrąg wtedy i tylko wtedy, kiedy iloczyn jego przekątnych jest równy sumie iloczynów przeciwległych boków:



$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|.$$

6.3 Zadania

1. Dowieść, że jeżeli symetralne $n-1$ boków n-kąta mają punkt wspólny, to jest on punktem wspólnym symetralnych wszystkich boków tego n-kąta.

*2. Dowieść, że każdy wielokąt foremny jest wpisany w okrąg.

3. Dowieść, że równoległobok jest wpisany w okrąg wtedy i tylko wtedy, kiedy jest prostokątem, nie korzystając z kryterium wpisywalności czworokąta w okrąg.

4. Dowieść, że równoległobok jest wpisany w okrąg wtedy i tylko wtedy, kiedy jest prostokątem, korzystając z kryterium wpisywalności czworokąta w okrąg.

*5. Dowieść, że trapez jest wpisany w okrąg wtedy i tylko wtedy, kiedy jest równoramienny, nie korzystając z kryterium wpisywalności czworokąta w okrąg.

6. Dowieść, że trapez jest wpisany w okrąg wtedy i tylko wtedy, kiedy jest równoramienny, korzystając z kryterium wpisywalności czworokąta w okrąg.

7. Dowieść, że krawędzie boczne ostrosłupa są równe wtedy i tylko wtedy, kiedy jego wysokość przecina podstawę w środku okręgu na niej opisanego.

*8. Na trójkącie, którego dwa kąty są równe $37°$ i $86°$, opisano okrąg, a następnie poprowadzono styczne do okręgu w wierzchołkach trójkąta. Obliczyć kąty trójkąta utworzonego przez te styczne.

9. Uczeń ma udowodnić, że każdy równoległobok wpisany w okrag jest prostokątem. Pisze tak:

W każdym czworokącie wpisanym w okrąg sumy przeciwległych kątów są równe. Jeżeli równoległobok nie jest prostokątem, to ma dwa kąty przeciwległe ostre, pozostałe dwa rozwarte. Zatem ich sumy nie są równe i taki równoległobok nie jest wpisany w okrąg.

Czy rozumowanie ucznia jest poprawne?

7 Wielokąty opisane na okręgach

Uwaga. Określenie „wielokąt opisany na okręgu” możemy zastąpić określeniem „wielokąt opisany na kole”. Zamiast mówić, że „wielokąt jest opisany na okręgu (na kole)” możemy powiedzieć, że „okrąg (koło) jest wpisany (wpisane) w wielokąt”.

7.1 Środek okręgu wpisanego w dany wielokąt

Na mocy znanej definicji

wielokąt nazywamy opisanym na okręgu, jeżeli wszystkie jego boki są styczne do tego okręgu.

Jeżeli zatem wielokąt jest opisany na okręgu, to środek okręgu jest punktem równo oddalonym od wszystkich jego boków - jest więc punktem wspólnym dwusiecznych wszystkich kątów wielokąta.

Stąd wynika, że

wielokąt jest opisany na okregu wtedy i tylko wtedy, kiedy dwusieczne wszystkich jego kątów mają punkt wspólny.

W szczególności

każdy trójkąt jest opisany na okręgu.

Własność tę można uogólnić. Zauważmy mianowicie, że

trzy kolejne boki każdego wielokąta są styczne do pewnego okręgu.

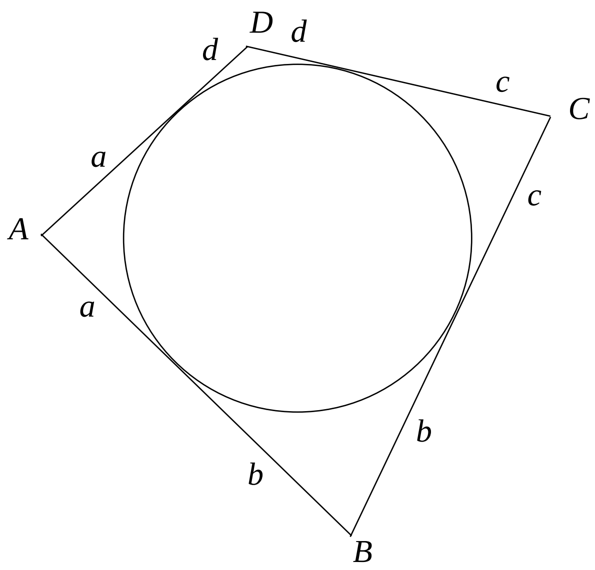
Jest to konsekwencja tego, że dwusieczne dwóch sąsiednich kątów wielokąta mają punkt wspólny.

7.2 Czworokąty opisane na okręgach

Jak wiadomo

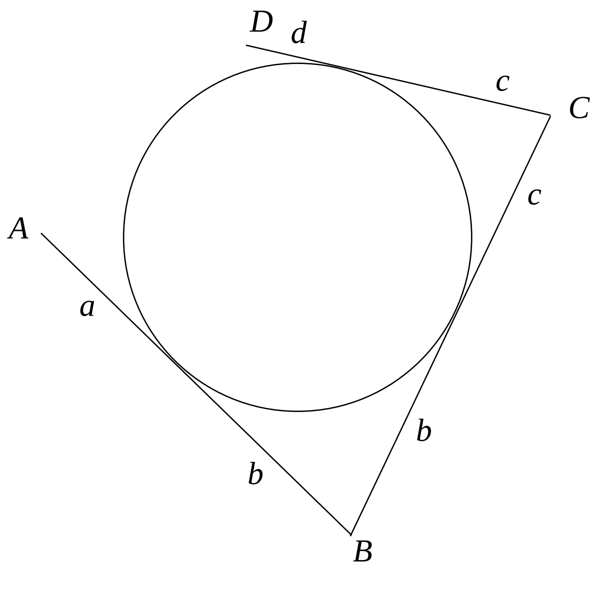
czworokąt jest opisany na okregu wtedy i tylko wtedy, kiedy sumy przeciwległych jego boków są równe.

Istotnie, jeżeli czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu, to



$$|AB| + |CD| = a + b + c + d = |BC| + |AD|.$$

Załóżmy teraz, że sumy przeciwległych boków wielokąta $ABCD$ są równe i rozważmy okrąg styczny do trzech jego boków, przyjmując oznaczenia jak na rysunku:



Ponieważ

$$|AB| + |CD| = |BC| + |AD|, \quad \text{więc} \quad a + b + c + d = b + c + |AD|,$$

skąd

$$|AD| = a + d.$$

Stąd wynika, że bok AD jest także styczny do okręgu, co kończy dowód.

7.3 Zadania

1. Dowieść, że jeżeli dwusieczne $n-1$ kątów n-kąta mają punkt wspólny, to jest on punktem wspólnym dwusiecznych wszystkich kątów tego n-kąta.

*2. Dowieść, że każdy wielokąt foremny jest opisany na okręgu, przy czym środek tego okręgu pokrywa się ze środkiem okregu opisanego na wielokącie.

3. Dowieść, że jeżeli w równoległobok można wpisać okrąg, to jest on rombem.

4. Uczeń uzasadnia, że jeżeli kolejne boki czworokąta są równe 3, 4, 5 i 6, to nie istnieje okrąg na nim opisany. Pisze:

Wynika to stąd, że w każdym czworokącie opisanym na okręgu sumy par przeciwległych boków są równe, a tutaj tak nie jest, bo: $3 + 5 \neq 4 + 6$.

Czy rozumowanie ucznia jest poprawne?

5. Uczeń uzasadnia, że jeżeli kolejne boki czworokąta są równe 3, 4, 5 i 4, to istnieje okrąg na nim opisany. Pisze:

Wynika to stąd, że w każdym czworokącie opisanym na okręgu sumy par przeciwległych boków są równe, a tutaj tak jest, bo: $3 + 5 = 4 + 4$.

Czy rozumowanie ucznia jest poprawne?

6. Uczeń ma udowodnić, że każdy równoległobok opisany na okręgu jest rombem. Pisze tak:

W każdym czworokącie opisanym na okręgu sumy przeciwległych boków są równe. Zatem dla równoległoboku o bokach a *i* b *jest spełniony warunek* $a+a = b+b$. *Jeżeli równoległobok jest rombem, to* $a = b$ *i ten warunek jest spełniony, co należało udowodnić.*

Czy rozumowanie ucznia jest poprawne?

7. Dłuższa przekątna rombu ma długość 14, a kąt ostry wynosi 60°. Obliczyć stosunek pola koła wpisanego w ten romb do pola rombu.

*8. Na okręgu o średnicy 7 opisano trapez równoramienny. Ramię trapezu jest równe 9. Obliczyć pole tego trapezu.

9. Czy istnieje trapez nierównoramienny opisany na okręgu?

10. Trapez równoramienny o polu 45 i wysokości 3 jest opisany na okręgu. Oblicz ramię tego trapezu.

11. Kąt ostry trapezu prostokątnego opisanego na kole o promieniu 2.5 wynosi 60°. Obliczyć pole trapezu.

*12. W trójkącie prostokątnym jedna przyprostokątna jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej. Obliczyć stosunek pola koła opisanego na tym trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt.

8 Konstrukcje

8.1 Konstrukcje wykonalne i niewykonalne

W programach szkolnych występują konstrukcje za pomocą cyrkla i linijki, czyli tzw. konstrukcje klasyczne. Konstruuje się m. in. symetralną odcinka, dwusieczną kąta, proste równoległe i prostopadłe. Można konstrukcyjnie podzielić odcinek na dowolnie wiele równych odcinków, a kąt na dwa równe kąty. Jak wiadomo są także konstrukcje niewykonalne za pomocą cyrkla i linijki. Na przykład nie można podzielić dowolnego kąta na trzy równe części (trysekcja kąta), nie można wyznaczyć boku kwadratu o polu równym polu danego koła (kwadratura koła), nie można znaleźć krawędzi sześcianu, którego objętość jest dwa razy większa od objętości sześcianu o danym boku (podwojenie sześcianu).

Za pomocą cyrkla i linijki można skonstruować trójkąt równoboczny, kwadrat, pięciokąt foremny i sześciokąt foremny, ale nie można skonstruować siedmiokąta foremnego. Znane jest kryterium konstruowalności wielokątów foremnych – jest to twiedzenie Gaussa. Aby sprawdzić, czy n-kąt foremny jest konstruowalny, rozkładamy liczbę n na czynniki pierwsze. Wielokąt jest konstruowalny wtedy i tylko wtedy, kiedy w tym rozkładzie nie ma w ogóle czynników nieparzystych (tzn. rozkład ma postać 2^m) lub wszystkie czynniki nieparzyste są różne i każdy z nich jest postaci $2^{2^k}+1$ dla pewnego $k\epsilon\{0,1,2,...\}$.

Zauważmy, że liczby postaci $2^{2^k}+1$ (zwane liczbami Fermata) bardzo szybko rosną wraz z k. Istotnie,

- dla $k=0$ otrzymujemy liczbę 3,

- dla $k=1$ mamy 5,

- dla $k=2$ mamy 17,

- dla $k=3$ mamy już 257,

- dla $k=4$ mamy aż 65 537.

Te liczby Fermata są pierwsze, następna jest złożona. Nie wiadomo, czy w ciągu liczb Fermata są jeszcze liczby pierwsze.

8.2 Zadania

1. Sprawdzić, które z n-kątów foremnych są konstruowalne dla $8 \leqslant n \leqslant 20$.

2. Skonstruować trójkąt, mając jeden bok, jeden kąt przy danym boku i wysokość opuszczoną na dany bok.

3. Skonstruować trójkąt, mając dane środki jego boków.

*4. Dane są trzy odcinki o długościach a, b i c. Skonstruować odcinki o długościach:

$$\frac{ab}{c}, \quad \frac{a^2}{b}, \quad \frac{a^3}{b^2}, \quad \frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

*5. Dane są odcinki o długościach x i y. Skonstruować odcinek $\sqrt{xy}$.

6. Wyznaczyć konstrukcyjnie zbiór punktów, z których dany odcinek widać pod danym kątem.

7. Opisać konstrukcję stycznej do koła przechodzącej przez:
a) dany punkt na okręgu,
b) dany punkt leżący na zewnątrz koła.

8. Na prostej p wybrano punkt A. Skonstruować zbiór punktów, których odległość od punktu A jest trzy razy większa od odległości od prostej p.

9 Obwód i pole

9.1 Długość krzywej

Pojęcie obwodu figury jest szczególnym przypadkiem pojęcia długości krzywej. Jeżeli krzywa jest łamaną, tzn. sumą skończenie wielu odcinków mających co najwyżej wspólne końce, to jej długość w naturalny sposób określamy jako sumę długości tych odcinków. W przypadku krzywych nie będących łamanymi ścisłe określenie długości wymaga przejścia do granicy lub posłużenia się pojęciem kresu. Rozpatrujemy mianowicie wszystkie łamane, których wierzchołki leżą na danej krzywej – nazwijmy je wpisanymi w krzywą.

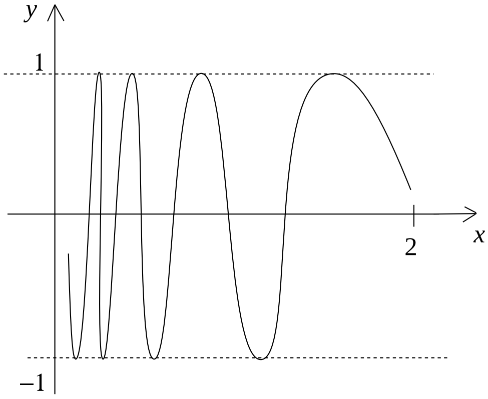
Kres górny zbioru długości łamanych wpisanych w krzywą, o ile istnieje, nazywamy długością krzywej.

W przypadku okręgu zbiór długości takich łamanych jest ograniczony z góry – na przykład przez obwód kwadratu opisanego na okręgu. Wobec tego istnieje kres górny tego zbioru. Jak wiadomo jest on równy $2\pi r$, gdzie r oznacza promień okręgu.

Są jednak krzywe, dla których zbiór długości łamanych wpisanych w krzywą nie jest ograniczony. Krzywym takim nie można zatem przypisać długości. Mówimy, że są one *nieprostowalne*. Krzywą nieprostowalną jest na przykład krzywa opisana wzorem:

$$y = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{dla } 0 < x \leqslant 2, \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Wygląda ona mniej więcej tak:



9.2 Pole figury

Definiując pola figur płaskich, zaczynamy od zdefiniowania pola prostokąta. Rozumiejąc je jako liczbę kwadratów jednostkowych wypełniających prostokąt, określamy pole jako iloczyn długości boków prostokąta.

Pole prostokąta (ogólnie figury geometrycznej) można także wprowadzić aksjomatycznie. Mianowicie polem prostokąta nazwiemy dowolną funkcję f przyporządkowującą prostokątom liczby nieujemne, spełniającą warunki:

- jeżeli prostokąty P_1 i P_2 są przystające, to $f(P_1) = f(P_2)$,

- jeżeli prostokąt P jest sumą prostokątów P_1 i P_2, których wnętrza są rozłączne, to $f(P) = f(P_1) + f(P_2)$.

Łatwo sprawdzić, że każda funkcja przyporządkowująca prostokątowi o bokach a, b liczbę αab, gdzie $\alpha > 0$ (w szczególności $\alpha = 1$), jest polem w sensie aksjomatycznym. Ponadto okazuje się, że jedynie funkcje tej postaci spełniają warunki pola.

Przyjmując postulat, aby pole kwadratu jednostkowego było równe 1, otrzymamy, że $\alpha = 1$.

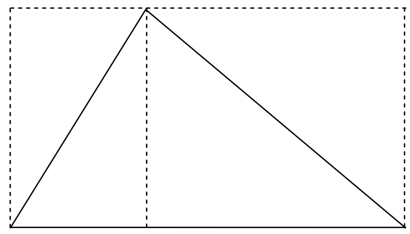
Mając pole prostokąta, możemy określić pola figur geometrycznych, identyfikując je z tzw. miarą Jordana. Oto szkic postępowania.

Rozważamy dowolny prostokąt zawierający daną figurę geometryczną i dzielimy go liniami prostopadłymi na mniejsze prostokąty. Tworzymy sumę s pól prostokątów zawartych w figurze i sumę S pól prostokątów mających punkty wspólne z figurą. Oczywiście $s \leqslant S$. Kres górny wszystkich sum s nazywamy miarą wewnętrzną figury, a kres dolny wszystkich sum S nazywamy jej miarą zewnętrzną. Obie te miary istnieją, jeżeli tylko figura jest ograniczona.

Figurę nazywamy mierzalną, jeżeli jej miara wewnętrzna jest równa zewnętrznej. Wtedy wspólną wartość tych miar nazywamy miarą Jordana danej figury.

Wiadomo, że nie każdy podzbiór płaszczyzny ma miarę Jordana – są zbiory niemierzalne. Na przykład niemierzalny jest zbiór punktów dowolnego kwadratu K, których obie współrzędne są wymierne. Każda suma s jest równa 0, bo zbiór nie zawiera żadnego prostokąta; natomiast każda suma S jest równa polu kwadratu K. Zatem zbiór ma miarę wewnętrzną 0, a jego miara zewnętrzna jest taka jak pole kwadratu K.

Zarówno wielokąty, jak i koło, są mierzalne. Ich pole można także określić inaczej, w sposób równoważny określeniu miary Jordana. Pole trójkąta jest równe połowie pola odpowiedniego prostokąta:



Każdy wielokąt można podzielić na trójkąty o rozłącznych wnętrzach, a jego pole jest sumą pól tych trójkątów, przy czym suma ta jest taka sama przy każdym podziale.

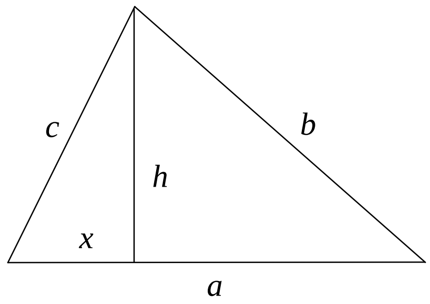
Pole koła jest kresem górnym pól wielokątów wpisanych w koło.

Na zakończenie przytoczę pewną ciekawą własność wielokątów mających równe pola. Okazuje się (twierdzenie Bolyai'a i Gerwiena), że każdy z nich ma taki sam rozkład na wielokąty. Mówiąc ściśle, jeżeli W i V są wielokątami o równych polach, to istnieją wielokąty $W_1, W_2, ..., W_n$ i wielokąty $V_1, V_2, ..., V_n$, wszystkie o rozłącznych wnętrzach i takie, że $W = W_1 \cup W_2 \cup ... \cup W_n$, $V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_n$ oraz wielokąty W_k i V_k są przystające dla każdego $k = 1, 2, ..., n$.

Stąd w szczególności wynika, że dowolny wielokąt można rozciąć na skończenie wiele części (wielokątów), z ktorych można złożyć kwadrat o tym samym polu.

9.3 Wzór Herona

Jest to wzór pozwalający obliczyć pole trójkąta o danych bokach. Wyprowadzimy go, korzystając z twierdzenia Pitagorasa. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:



Z twierdzenia Pigarosa mamy:

$$c^2 = h^2 + x^2, \quad b^2 = h^2 + (a-x)^2.$$

Odejmując równości stronami, otrzymujemy po redukcji

$$c^2 - b^2 = 2ax - a^2,$$

skąd

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}.$$

Obliczmy teraz wysokość h:

$$h^2 = c^2 - x^2 = c^2 - (\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a})^2 = (c - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a})(c + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}) =$$

$$= \frac{2ac - a^2 + b^2 - c^2}{2a} \cdot \frac{2ac + a^2 - b^2 + c^2}{2a} = \frac{b^2 - (a-c)^2}{2a} \cdot \frac{(a+c)^2 - b^2}{2a} =$$

$$= \frac{(b-a+c)(b+a-c)(a+c-b)(a+c+b)}{4a^2}.$$

Przyjmując standardowe oznaczenie

$$a + b + c = 2p,$$

otrzymamy

$$b - a + c = 2p - 2a, \quad b + a - c = 2p - 2c, \quad a + c - b = 2p - 2b,$$

skąd

$$h^2 = \frac{2p(2p-2a)(2p-2c)(2p-2b)}{4a^2}.$$

Zatem

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(b-c)}.$$

W konsekwencji pole trójkąta, równe $\frac{1}{2}ah$, wynosi

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(b-c)}.$$

9.4 Zadania

*1. Dowieść w sposób geometryczny, że wśród prostokątów o danym obwodzie największe pole ma kwadrat.

2. Kwadrat i trójkąt równoboczny mają ten sam obwód. Która z figur ma większe pole?

*3. Wyprowadzić wzór na pole trapezu.

*4. Udowodnić, że stosunek pól wielokątów podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

5. Wykazać, że pole wielokąta opisanego na okręgu jest równe iloczynowi połowy jego obwodu i promienia koła.

6. Przwciwprostokątna trójkąta prostokątnego równoramiennego jest równa 5. Obliczyć pole tego trójkąta.

7. Wykazać, że pole każdego trójkąta jest niewiększe od połowy iloczynu długości dowolnych dwóch jego boków.

*8. Wykazać, że jeżeli a, b, c, gdzie $a \geqslant b \geqslant c$, są bokami trójkąta o polu 1, to $b \geqslant \sqrt{2}$.

*9. Wykazać, że pole P dowolnego trójkąta spełnia nierówność

$$P \leqslant \frac{a^2 + b^2}{4},$$

gdzie a i b są dowolnymi bokami tego trójkąta.

10. Trzy jednakowe okręgi o promieniu r, parami styczne zewnętrznie, wycinają z płaszczyzny cztery ograniczone obszary, z których trzy są kołami. Obliczyć pole czwartego obszaru.

*11. Łączymy odcinkami środki boków dowolnego czworokąta. Wykazać, że pole powstałego w ten sposób czworokąta jest równe połowie pola czworokąta wyjściowego.

*12. Udowodnić, że jeżeli dwa czworokąty mają te same środki boków, to mają równe pola.

*13. Jak obliczyć pole trójkąta prostokątnego, jeżeli dana jest jego przeciwprostokątna i promień koła wpisanego?

10 Zadania różne

*1. Nie korzystając z twierdzenia o środkowych trójkąta, dowieść, że wysokości trójkąta równobocznego przecinają się w punkcie dzielącym każdą z nich w stosunku $1:2$.

2. Wymienić izometrie własne n-kąta foremnego.
Rozważyć przypadki: n parzyste, n nieparzyste.

3. Udowodnić, że w trójkącie prostokątnym suma przyprostokątnych jest równa sumie średnic okręgu wpisanego i okręgu opisanego.

*4. W trójkącie równobocznym znaleźć punkt, dla którego suma odległości od trzech boków jest największa.

*5. Obliczyć pole trapezu równoramiennego, którego przekątne są prostopadłe, a wysokość wynosi a.

6. Dane są podstawy trapezu a i b oraz jego wysokość h. Obliczyć:
a) odległość punktu przecięcia przekątnych od obu podstaw,
b) długość odcinka przechodzącego przez punkt przecięcia przekątnych i równoległego do podstaw.

7. W trójkąt równoboczny wpisano kwadrat o polu 3 w ten sposób, że dwa wierzchołki kwadratu leżą na jednym boku trójkąta, a dwa na pozostałych bokach. Obliczyć bok trójkąta.

8. Uczeń uzasadnia, że każdy równoległobok, w który można wpisać okrąg, jest rombem. Pisze:

Wynika to stąd, że w każdym czworokącie opisanym na okręgu sumy par przeciwległych boków są równe, a w rombie tak jest.

Ocenić rozumowanie ucznia.

9. Udowodnić, że wielokąt jest foremny wtedy i tylko wtedy, kiedy istnieje okrąg wpisany w wielokąt i okrąg opisany na wielokącie, przy czym okręgi te mają wspólny środek.

*10. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego wpisanego w koło o promieniu r, jeżeli wiadomo, że odległość stycznej do okręgu poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego od jednego z pozostałych wierzchołków tego trójkąta jest rowna d, gdzie $d \geqslant r$.

11. Udowodnić, że trójkąt jest ostrokątny wtedy i tylko wtedy, kiedy suma kwadratów dwóch krótszych boków jest większa od kwadratu najdłuższego boku.

12. Udowodnić, że trójkąt jest rozwartokątny wtedy i tylko wtedy, kiedy suma kwadratów dwóch krótszych boków jest mniejsza od kwadratu najdłuższego boku.

*13. Obliczyć kąty tójkąta, w którym środkowa i wysokość poprowadzone z tego samego wierzchołka dzielą kąt przy tym wierzchołku na trzy równe części.

14. W trapez równoramienny o polu S wpisano okrąg. Obliczyć promień tego okręgu, jeżeli wysokość trapezu jest dwa razy mniejsza od ramienia.

*15. Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny. Odcinek łączący punkty styczności ramion trapezu z okręgiem ma długość d. Obliczyć pole trapezu.

11 Podpowiedzi do niektórych zadań

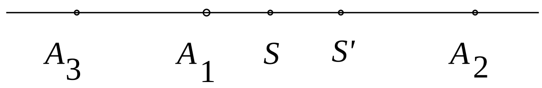
s. 10, zad. 7. Niech S i S' będą dwoma różnymi środkami symetrii dowolnej figury. Rozważyć następujący ciąg punktów:

A_1 – obraz punktu S' względem środka S,

A_2 – obraz punktu A_1 względem środka S',

A_3 – obraz punktu A_2 względem środka S,

itd.

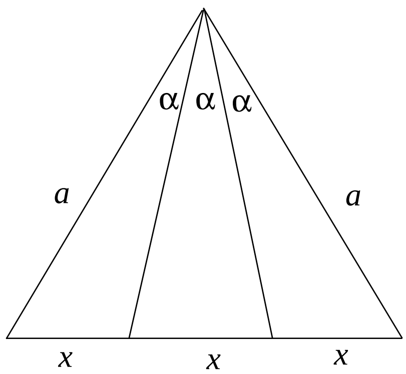


Wykazać, że zbiór złożony z punktów A_1, A_2, A_3, ... jest nieograniczony.

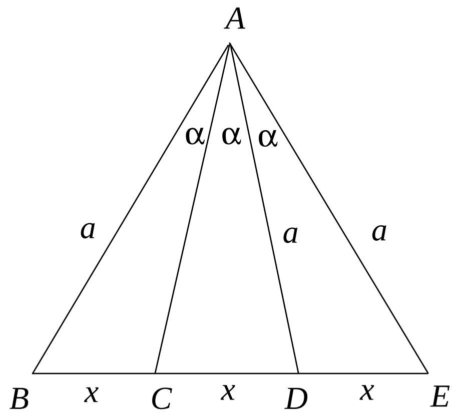
s. 10, zad. 10. Rozważyć najpierw przypadek, kiedy punkty są po tej samej stronie prostej. Przypadek, kiedy są one po różnych stronach prostej, sprowadzić do poprzedniego, odbijając względem prostej jeden z punktów.

s. 17, zad. 4. Wyrazić pole trójkąta za pomocą poszczególnych wysokości i odpowiadających im podstaw. Porównując odpowiednie wyrażenia, otrzymamy związek między bokami trójkąta sprzeczny z warunkiem trójkąta.

s. 17, zad. 11. Przypuśćmy, że uczeń ma rację:



Ponieważ dwusieczna kąta w trójkącie ABD dzieli przeciwległy bok na odcinki proporcjonalne do pozostałych boków trójkąta (zob. s. 13), więc odcinek AD też ma długość a:



Stąd wynika, że okrąg o środku A i promieniu a przechodzi przez punkty B, D, E, co jest sprzeczne z ich współliniowością.

s. 21, zad. 10. Wystarczy zauważyć, że wszystkie n-kąty foremne są podobne i skorzystać z uogólnienia twierdzenia Pitagorasa (zob. s 18)

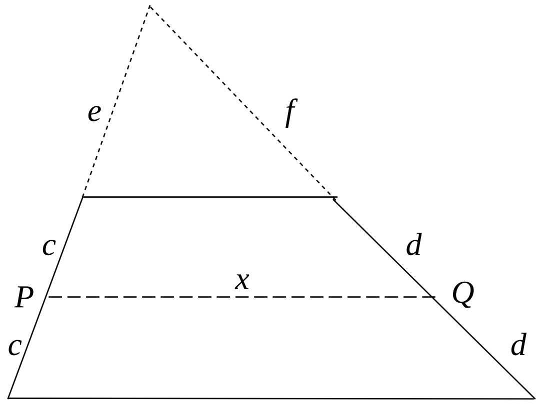
s. 21, zad. 11. Skorzystać z tego, że suma pól półkoli zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu półkola zbudowanego na przeciwprostokątnej.

s. 22, zad. 13. Skorzystać z własności, że jeżeli dwa boki trójkąta, z których jeden jest dwa razy dłuższy niż drugi, tworzą kąt $60°$, to trójkąt ten jest prostokątny. Zastosować tę własność do trójkąta utworzonego przez połowy przekątnych tworzących kąt $60°$ i bok równoległoboku.

s. 22, zad. 14 i 15. Obliczyć wysokość trójkąta opuszczoną na jeden z dwóch danych boków.

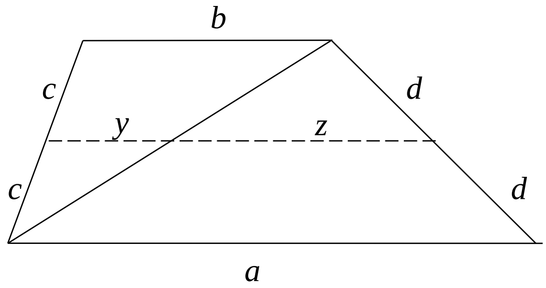
s. 28, zad. 8. Wykazać, że boki otrzymanego czworokąta są równoległe do przekątnych wyjściowego czworokąta.

s. 28, zad. 9. Przedłużyć ramiona trapezu, aby utworzyć trójkąt:



Ponieważ podstawy trapezu są równoległe, więc $\frac{e}{2c} = \frac{f}{2d}$, skąd $\frac{e}{c} = \frac{f}{d}$. W konsekwencji odcinek PQ jest równoległy do górnej (a więc i do dolnej) podstawy trapezu.

Aby dowieść, że jest ich średnią arytmetyczną, podzielmy trapez na dwa trójkąty, rysując przekątną:

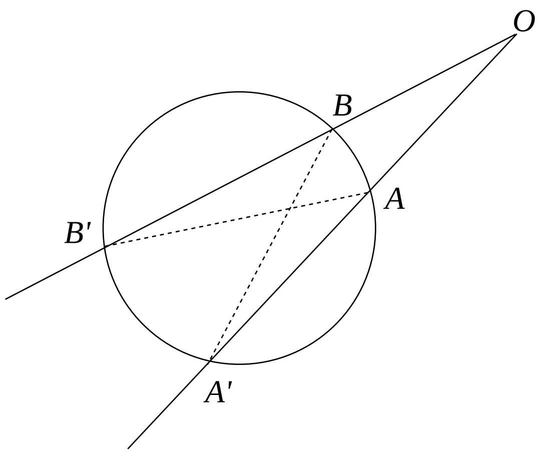


Otrzymujemy: $y = \frac{b}{2}$, $z = \frac{a}{2}$, skąd $x = y + z = \frac{a+b}{2}$.

s. 33, zad. 5. Rozważyć kąty wpisane o wierzchołku w punkcie przecięcia obu okręgów i oparte na średnicach tych okręgów.

s. 33, zad. 6. Skorzystać z tego, że punkt przecięcia symetralnych jest środkiem okręgu przechodzącego przez wierzchołki trójkąta.

s. 33, zad. 8. Skorzystać z podobieństwa trójkątów OAB' i OBA':



s. 37, zad. 2. Wykazać, rozważając odpowiednie trójkąty, że punkt przecięcia symetralnych dwóch kolejnych boków leży na symetralnej następnego boku.

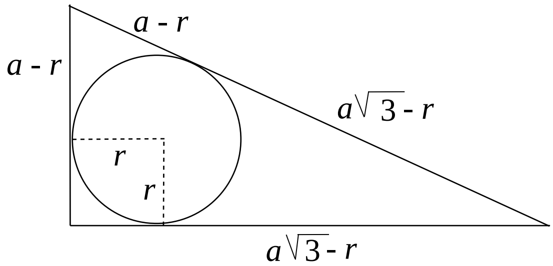
s. 38, zad. 5. Wynika to z tego, że podstawy mają tą samą symetralną i jest ona osią symetrii trapezu.

s. 38, zad. 8. Rozważyć różne położenia środka okręgu względem trójkąta.

s. 41, zad. 2. Wykazać, rozważając odpowiednie trójkąty, że punkt przecięcia dwusiecznych dwóch kolejnych kątów leży na dwusiecznej następnego kąta oraz na symetralnych boków.

s. 42, zad. 8. Obliczyć sumę podstaw.

s. 42, zad. 12. Oznaczmy krótszą przyprostokątną literą a. Wtedy przeciwprostokątna jest równa $2a$, a druga przyprostokątna $a\sqrt{3}$. Mamy więc sytuację jak na rysunku:



Zatem $2a = a - r + a\sqrt{3} - r$, skąd $r = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$. W konsekwencji stosunek pola koła opisanego na trójkącie do pola koła wpisanego w trójkąt jest równy

$$\frac{\pi a^2}{\pi(\frac{a(\sqrt{3}-1)}{2})^2},$$

czyli $2(2+\sqrt{3})$.

s. 44, zad. 4. Skorzystać z proporcji z twierdzenia Talesa.

s. 44, zad. 5. Skorzystać z włsności trójkąta prostokątnego, o której mowa na s. 27, i skonstruować trójkąt prostokątny o przeciwprostokatnej $x + y$.

s. 49, zad. 1. Narysować kwadrat o danym obwodzie, zwiększyć dwa równoległe boki i jednocześnie zmniejszyć dwa pozostałe – o tyle samo, aby otrzymać prostokąt o tym samym obwodzie; sprawdzić, że pole dodane do pola kwadratu jest większe niż pole od niego odjęte.

s. 49, zad. 3. Najprościej podzielić trapez na dwa trójkąty.

s. 49, zad. 4. Zacząć od trójkątów.

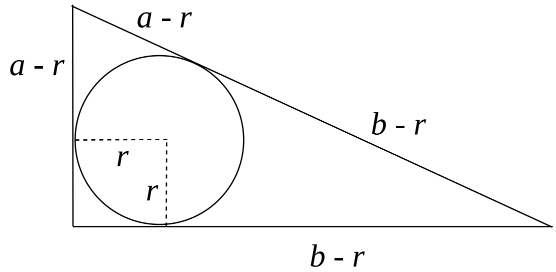
s. 49, zad. 8. Skorzystać z zadania 7.

s. 49, zad. 9. Zauważyć, że $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ i skorzystać z zad. 7.

s. 49, zad. 11. Powstały czworokąt jest równoległobokiem (zob. zad 8 na s. 28). Poprowadzić przekątną w wyjściowym czworokącie. Pole każdego z dwóch powstałych w ten sposób trójkątów jest dwa razy większe od pola zawartej w nim części równoległoboku.

s. 49, zad. 12. Skorzystać z zad. 11.

s. 49, zad. 13. Niech a, b będą przyprostokątnymi trójkąta o przeciwprostokątnej c, a r niech będzie promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt:



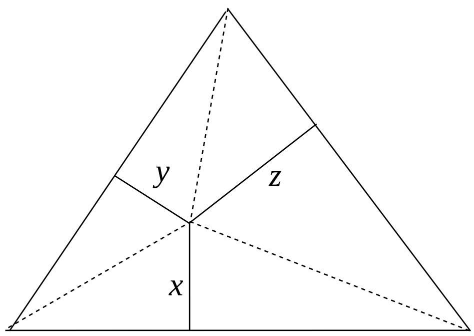
Wtedy $a - r + b - r = c$, skąd $a + b = 2r + c$. W konsekwencji

$$(2r + c)^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab.$$

Stąd $ab = 2r(r + c)$, więc pole trójkąta jest równe $r(r + c)$.

s. 50, zad. 1. Ekierki!

s. 50, zad. 4. Odległość jest taka sama dla każdego punktu trójkąta. Jeżeli bowiem x, y, z są odległościami dowolnego punktu trójkąta od jego boków, bok trójkąta jest równy a, a wysokość h, to

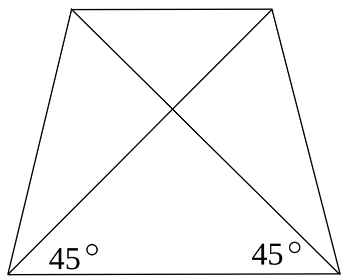


$$\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az = \frac{1}{2}ah,$$

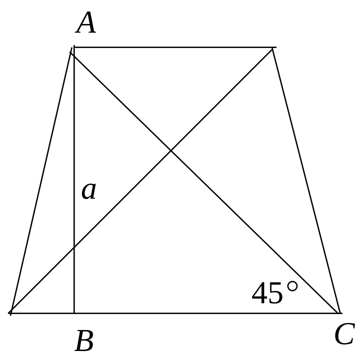
skąd

$$x + y + z = h.$$

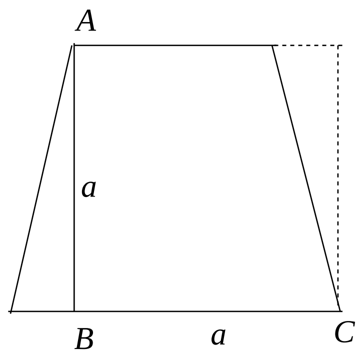
s. 50, zad. 5. Z równoramienności trapezu wynika, że kąty zaznaczone na rysunku są równe, a ponieważ przekątne są prostopadłe, więc kąty te mają po 45°:



Zatem trójkąt ABC

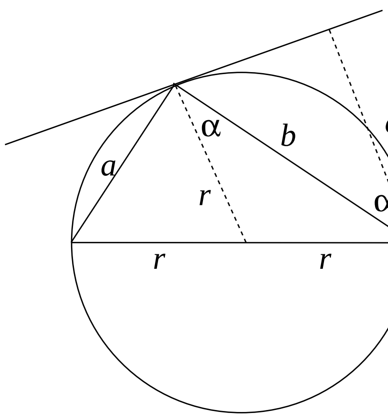


jest równoramienny. Stąd $|BC| = a$ i trapez można przekształcić w kwadrat o tym samym polu:

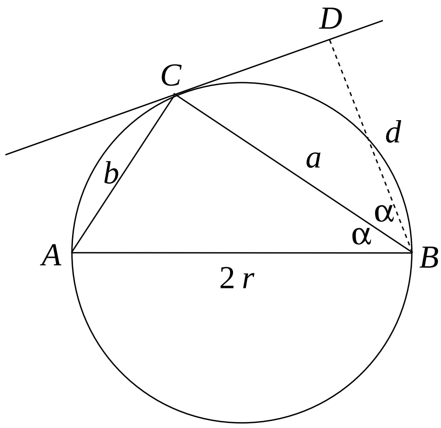


Pole jest równe a^2.

s. 50, zad. 10. Przedstawmy sytuację na rysunku, zaznaczając równe kąty:



Zatem



trójkąty ABC i BDC są podobne. W konsekwencji

$$\frac{a}{2r} = \frac{d}{a},$$

skąd $a^2 = 2dr$.

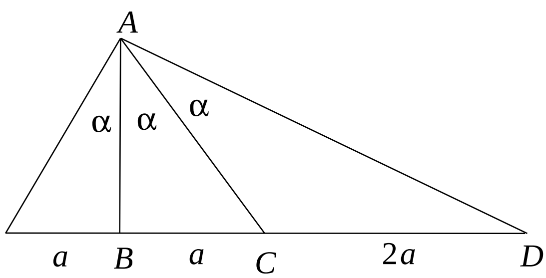
Ponieważ z twierdzenia Pitagorasa

$$2dr + b^2 = (2r)^2,$$

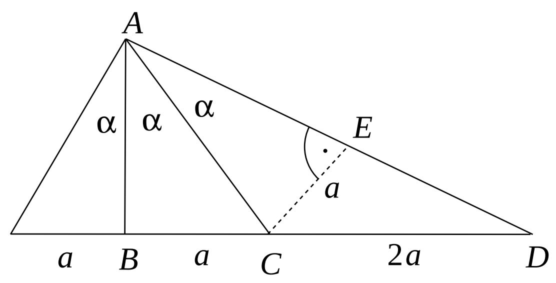
więc $b^2 = 2r(2r - d)$.

Pole trójkąta, równe $\frac{1}{2}ab$, wynosi zatem $r\sqrt{d(2r - d)}$.

s. 51, zad.13. Przedstawmy sytuację na rysunku:

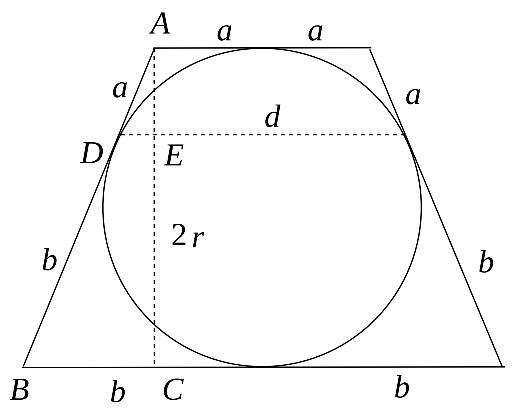


Ponieważ AC jest dwusieczną kąta przy wierzchołku A trójkąta ABD



więc $CE = a$. Stąd wynika, że w trójkącie CDE kąt przy wierzchołku C wynosi $60°$, a trójkąty ABC i ACE są przystające. Zatem ich kąty przy wierzchołku C mają również po $60°$. W konsekwencji $\alpha = 30°$. Wynika stąd, że wyjściowy trójkąt ma kąty: $90°$, $60°$ i $30°$.

s. 51, zad. 15. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:



Z podobieństwa trójkątów ABC i ADE wynika, że $\dfrac{d-a}{b-a} = \dfrac{a}{a+b}$, skąd po przekształceniu otrzymujemy równanie

$$d(a+b) = 2ab.$$

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymamy $(2r)^2 + (b-a)^2 = (a+b)^2$, skąd

$$r^2 = ab.$$

Zatem $d(a+b) = 2r^2$. Stąd $a + b = \dfrac{2r^2}{d}$, więc pole trapezu wynosi $\dfrac{2r^3}{d}$.