18 lutego 2024 r.

Preliminaria

Zadanie 1. (A) Sprawdź, czy podana funkcja jest rozwiązaniem podanego równania różniczkowego: a) $x(t) = \operatorname{tg} t, \quad x' = 1 + x^2$; b) $x(t) = \frac{\sin t}{t}, \quad tx' + x = \cos t$.
Zadanie 2. (A) Znajdź rozwiązania stacjonarne poniższych równań. Jeśli to możliwe, zbadaj ich charakter: a) $y'(t) = ye^t$; b) $y'(t) = (t-1)(y^2-1)$; c) $y'(t) = \log(y^2+1)$; d) $y'(t) = y^3 + y^2 - 2y$.

Równania o zmiennych rozdzielonych

Zadanie 3. (A) Znajdź rozwiązania ogólne następujących równań różniczkowych o rozdzielonych zmiennych: a) $y' = e^{x+y}$; b) $y' = \sqrt{x}/y$; c) $y' = \sqrt{y/x}$.
Zadanie 4. (A) Znajdź rozwiązania ogólne następujących równań i naszkicuj ich wykresy dla różnych stałych C. Następnie znajdź rozwiązanie równania spełniające podany warunek początkowy: a) $y' = 2,\ y(0) = 2$; b) $y' = y/x,\ y(1) = 5$; c) $y' = -y^2e^x,\ y(0) = 1/2$.
Zadanie 5. (A) Rozwiąż równania nie rozdzielając różniczek dy i dt (czyli całkując metodą "klasyczną"): a) $y' = (1+t)(1+y)$; b) $y' = e^{t+y+3}$; c) $tyy' = \ln t, \quad y(1) = 1$.
Zadanie 6. (A) Równania postaci $dy/dt = f(y/t)$, gdzie f jest daną funkcją, nazywamy równaniem jednorodnym. Udowodnij, jeżeli y jest rozwiązaniem równania jednorodnego, to funkcja $v(t) = y(t)/t$ spełnia równanie o zmiennych rozdzielonych $t(dv/dt) + v = f(v)$.
Zadanie 7. (A) Rozwiąż równania jednorodne: a) $2x + t - tx' = 0$; b) $tx' = x - te^{x/t}$; c) $tx' = x\cos\left(\log\frac{x}{t}\right)$.
Zadanie 8. (B) Dla danej rodziny krzywych znajdź trajektorie ortogonalne: a) $y = Cx^2$; b) $y = C\sin x$; c) $y = Ce^x$; d) $x^2 + y^2 = Cx$.

Równania liniowe pierwszego rzędu

Zadanie 9. (A) Znajdź całkę ogólną (tzn. rozwiązanie ogólne) równań liniowych mnożąc je przez odpowiedni czynnik całkujący: a) $x' + x\cos t = 0$; b) $x' + t^2x = t^2$; c) $x' + \frac{2t}{1+t^2}x = \frac{1}{1+t^2}$; d) $x' + x = te^t$.
Zadanie 10. (A) Rozwiąż następujące zagadnienia początkowe bez znajdowania rozwiązania ogólnego: a) $y' + \sqrt{1+t^2}y = 0, \quad y(0) = \sqrt{5}$; b) $y' + ty = 1 + t, \quad y(3/2) = 0$.
Zadanie 11. (B) Udowodnij, że dla równania $x' + a(t)x = f(t)$, gdzie a i f są funkcjami ciągłymi, $a(t) \geqslant c > 0$, oraz $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, zachodzi relacja $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.
Zadanie 12. (A) Udowodnij, że równanie Bernoulliego, tzn. równanie postaci: $x' + a(t)x = b(t)x^m$, $m \in \mathbb{R}$, sprowadza się przez zamianę zmiennych $z(t) = x(t)^{1-m}$ do równania liniowego.
Zadanie 13. (A) Rozwiąż równania: a) $tx' + x = x^2\log t$; b) $x' = tx + t^3x^2$.
Zadanie 14. (A) Równanie postaci $x' + a(t)x = b(t)x^2 + f(t)$, gdzie a, b, f są danymi funkcjami, nazywa się równaniem Riccatiego. Nie istnieje ogólny sposób całkowania tego równania. Udowodnij, że jeżeli znamy jedno rozwiązanie $x_1(t)$, to funkcja $u(t) = x(t) - x_1(t)$ spełnia równanie Bernoulliego.
Zadanie 15. (A) Znajdź rozwiązania szczególne następujących równań Riccatiego, zredukuj je do równań typu Bernoulliego i scałkuj: a) $t^2x' + tx + t^2x^2 = 4$; b) $x' + 2xe^t - x^2 = e^{2t} + e^t$.

Równania zupełne

Zadanie 16. (A) W podanych równaniach dobierz stałą a tak, aby było ono zupełne, a następnie rozwiąż je: a) $t + ye^{2ty} + ate^{2ty}y' = 0$; b) $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{(at+1)}{y^3}y' = 0$.

Zadanie 17. (B) Znajdź wszystkie funkcje $f(t)$, dla których równanie $y^2 \sin t + yf(t)(dy/dt) = 0$ jest zupełne. Rozwiąż równanie dla tych funkcji f.
Zadanie 18. (A) Znajdź współczynnik $f = f(t)$ w równaniu $f(t)x' + t^2 + x = 0$, jeżeli wiadomo, że ma ono czynnik całkujący postaci $u(t) = t$.
Zadanie 19. (B) Równanie liniowe niejednorodne $(dy/dt) + a(t)y = b(t)$ nie jest zupełne. Znajdź czynnik całkujący.
Zadanie 20. (A) Rozwiąż równania w postaci różniczek zupełnych: a) $2tx\ dt + (t^2 - x^2)\ dx = 0$; b) $e^{-x}\ dt - (2x + te^{-x})\ dx = 0$.
Zadanie 21. (A) Sprawdź, że podana funkcja $\mu(x, y)$ jest czynnikiem całkującym danego równania i rozwiąż równanie: a) $6xy\, dx + (4y + 9x^2)\, dy = 0, \quad \mu(x, y) = y^2$; b) $-y^2\, dx + (x^2 + xy)\, dy = 0, \quad \mu(x, y) = 1/(x^2 y)$; c) $y(x + y + 1)\, dx + (x + 2y)\, dy = 0, \quad \mu(x, y) = e^x$.
Zadanie 22. (A) Równanie różniczkowe może mieć więcej niż jeden czynnik całkujący. Udowodnij, że $\mu_1(x, y) = 1/(xy)$, $\mu_2(x, y) = 1/y^2$, $\mu_3(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$ są czynnikami całkującymi równania $y\, dx - x\, dy = 0$. Uzasadnij, że otrzymane przy pomocy tych czynników całkujących rozwiązania są równoważne.
Zadanie 23. (A) Scałkuj równania metodą czynnika całkującego: a) $\left(\frac{x}{y} + 1\right) dx + \left(\frac{x}{y} - 1\right) dy = 0$; b) $(x^2 + y)dx - xdy = 0$; c) $(y + x^2)dy + (x - xy)dx = 0$.
Zadanie 24. (A) Uzasadnij, że równanie o zmiennych rozdzielonych $M(t) + N(y)(dy/dt) = 0$ jest równaniem zupełnym.
Zadanie 25. (B) Uzasadnij, że jeżeli $\partial M/\partial y = \partial N/\partial t$, to wyrażenie $M(t, y) - \int(\partial N(t, y)/\partial t)dy$ nie zależy od od y (tzn. zależy tylko od t).

Andrzej Raczyński