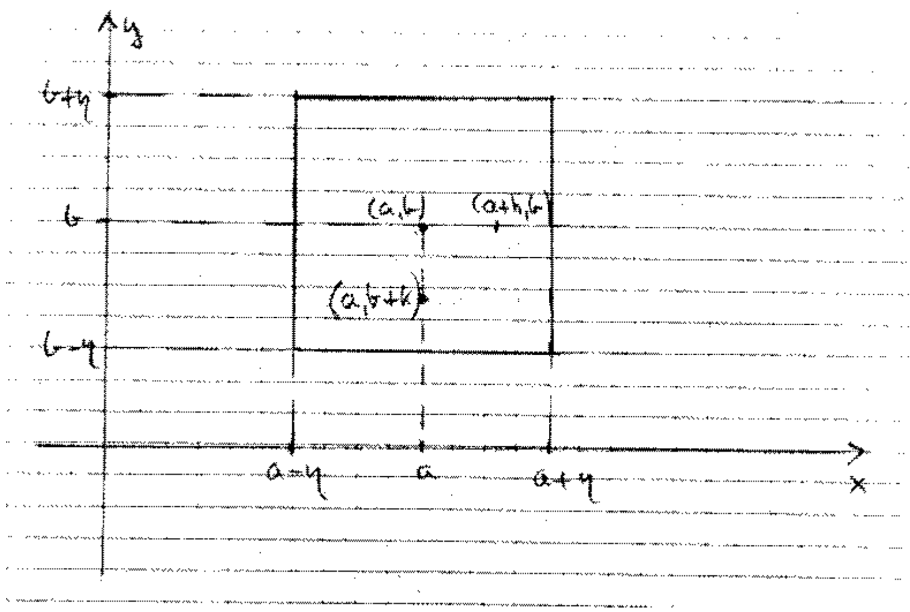
Rozdział II

Różniczkowanie funkcji wielu zmiennych.

1. Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu.

Niech $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ będzie ustalonym punktem i niech $f(x,y)$ będzie funkcją dwóch zmiennych określoną dla

(1) $$|x-a| < \eta, \qquad |y-b| < \eta \qquad (\eta > 0).$$



[rys. 6]

Iloraz różnicowy (por. rys. 6)
$$\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$
jet funkcją zmiennej h określoną dla $0 \neq |h| < \eta$. Jeżeli ma ona skończoną granicę przy $h \to 0$, to granicę tą nazywamy *pochodną cząstkową funkcji f względem x w punkcie* (a,b).

Oznaczamy

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=f_x(a,b).$$

Zamieniając role zmiennych x, y możemy podobnie utworzyć iloraz różnicowy

$$\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$$

określony dla $0 \neq |k| < \eta$. Jego granicę przy $k \to 0$ (o ile istnieje i jest skończona) nazywamy *pochodną cząstkową funkcji f względem y w punkcie* (a,b). Oznaczamy

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}=f_y(a,b).$$

Dla zdefiniowanych w ten sposób pochodnych cząstkowych funkcji f używane są również oznaczenia

$$f_x(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \qquad f_y(a,b)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

lub krócej

$$f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}; \qquad f_y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

(czytamy: df po dx, df po dy) lub też

$$\frac{\partial}{\partial x}f, \qquad \frac{\partial}{\partial y}f.$$

Skrócony zapis nie uwidacznia, w jakim punkcie obliczamy pochodne cząstkowe.

Z definicji pochodnych cząstkowych widać, że przyjmując oznaczenia

$$g(x)=f(x,b), \qquad h(y)=f(a,y)$$

mamy

$$f_x(a,b)=g'(a), \qquad f_y(a,b)=h'(b).$$

Wynika stąd, że pochodne cząstkowe funkcji f są pochodnymi w zwykłym sensie (tj. pochodnymi funkcji jednej zmiennej) przy założeniu, że druga zmienna została ustalona. Wobec tego przy obliczaniu pochodnych cząstkowych możemy stosować reguły rachunkowe znane Czytelnikowi w przypadku funkcji jednej zmiennej.

Przykład 1. Niech

$$f(x,y)=x^2+2y^2+xy+y+5. \tag{2}$$

Funkcja f jest określona w całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Aby obliczyć jej pochodną cząstkową f_x w dowolnie ustalonym punkcie (x,y) różniczkujemy (2) traktując y jako stałą. Otrzymujemy

$$f_x(x,y)=2x+y.$$

Podobnie, w celu obliczenia pochodnej cząstkowej f_y w punkcie (x, y) różniczkujemy (2) traktując x jako stałą, co daje

$$f_y(x, y) = 4y + x + 1.$$

Przykład 2. Obliczymy pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x, y) = x^y \qquad (x > 0). \tag{3}$$

Funkcja f jest określona w prawej półpłaszczyźnie $x > 0$. Aby obliczyć jej pochodną cząstkową f_x różniczkujemy (3) traktując y jako stałą, co daje

$$f_x(x, y) = yx^{y-1}.$$

Pochodną cząstkową f_y obliczamy przez różniczkowanie (3) traktując przy tym x jako stałą. Otrzymujemy

$$f_y(x, y) = x^y \log x.$$

Przykład 3. Niech

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{dla} \quad (x, y) \neq (0, 0), \qquad f(0, 0) = 0.$$

Obliczymy pochodne cząstkowe funkcji f w punkcie $(0, 0)$ korzystając z ich definicji. Mamy

$$f(h, 0) = f(0, k) = 0$$

dla dowolnych h, k i wobec tego

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

i podobnie

$$f_y(0, 0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0.$$

Funkcja f była rozważana w Przykładzie 6 i w Przykładzie 10 rozdz.I, gdzie wykazaliśmy, że nie ma ona granicy w początku układu a więc nie jest ciągła w tym punkcie. Pomimo tego funkcja f ma w punkcie $(0, 0)$ obie pochodne cząstkowe - sytuacja odmienna, niż w przypadku funkcji jednej zmiennej, gdzie z istnienia pochodnej wynika ciągłość.

W podobny sposób wprowadzamy pochodne cząstkowe funkcji trzech zmiennych $f(x, y, z)$. Zakładając, że funkcja f jest określona dla

$$|x - a| < \eta, \qquad |y - b| < \eta, \qquad |z - c| < \eta \qquad (\eta > 0) \tag{4}$$

utwórzmy iloraz różnicowy

$$\frac{f(a+h,b,c)-f(a,b,c)}{h},$$

który jest funkcją zmiennej h określoną dla $0 \neq |h| < \eta$. Jeżeli funkcja ta ma skończoną granicę przy $h \to 0$, to granicę tą nazywamy *pochodną cząstkową funkcji f względem x w punkcie* (a,b,c). Oznaczamy

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b,c)-f(a,b,c)}{h} = f_x(a,b,c).$$

Zamieniając role zmiennych określamy *pochodną cząstkową funkcji f względem y w punkcie* (a,b,c) jako

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k,c)-f(a,b,c)}{k} = f_y(a,b,c)$$

oraz *pochodną cząstkową funkcji f względem z w punkcie* (a,b,c) jako

$$\lim_{l\to 0} \frac{f(a,b,c+l)-f(a,b,c)}{l} = f_z(a,b,c).$$

Analogicznie, jak dla funkcji dwóch zmiennych, oznaczamy

$$f_x(a,b,c) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c), \qquad f_y(a,b,c) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c), \qquad f_z(a,b,c) = \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,)$$

lub krócej

$$f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}; \qquad f_y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}; \qquad f_z, \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

bez uwidaczniania, w jakim punkcie obliczamy pochodne cząstkowe.

Przyjmując

$$g(x) = f(x,b,c), \qquad h(y) = f(a,y,c), \qquad j(z) = f(a,b,z)$$

mamy

$$f_x(a,b,c) = g'(a), \qquad f_y(a,b,c) = h'(b), \qquad f_z(a,b,c) = j'(c).$$

Zatem również w przypadku funkcji trzech zmiennych pochodne cząstkowe są pochodnymi funkcji jednej zmiennej przy założeniu, że pozostałe zmienne zostały ustalone. Możemy wobec tego przy obliczaniu ich stosować znane Czytelnikowi reguły różniczkowania.

Przykład 4. Obliczymy pochodne cząstkowe funkcji

$$f(x,y,z) = z^{xy} \qquad (z > 0). \tag{5}$$

Aby obliczyć pochodną cząstkową f_x różniczkujemy (5) traktując y, z jako stałe, co daje

$$f_x = yz^{xy} \log z,$$

zaś zamieniając role zmiennych x, y otrzymujemy stąd

$$f_y = xz^{xy} \log z.$$

Aby obliczyć pochodną f_z różniczkujemy (5) traktując x, y jako stałe, co daje

$$f_z = xyz^{xy-1}.$$

2. Różniczkowalność funkcji.

Zacznijmy od funkcji jednej zmiennej $f(x)$ zakładając, że jest ona określona dla x spełniających warunek

$$|x-a|<\eta \qquad (\eta>0)$$

czyli w pewnym otoczeniu punktu $a \in \mathbb{R}$. Mówimy, że f jest *różniczkowalna w punkcie* a, jeżeli istnieją stała A i funkcja $r(h)$ takie, że dla dostatecznie małych $|h|$

$$f(a+h)-f(a)=Ah+r(h) \tag{6}$$

przy czym

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h}=0. \tag{7}$$

Równość (6) oznacza, że przyrost funkcji rózniczkowalnej można w przybliżeniu zastąpić przez funkcję liniową przyrostu h argumentu, przy czym zgodnie z (7) błąd $r(h)$ szybko dąży do zera przy $h\to 0$.

Podana definicja różniczkowalności przenosi się łatwo na przypadek funkcji wielu zmiennych. Omówimy ją szczegółowo dla funkcji dwóch zmiennych.

Niech $f(x,y)$ będzie funkcją określoną dla x,y spełniających (1) (por. rys. 6). Mówimy, że f jest *różniczkowalna w punkcie* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, jeżeli istnieją stałe A,B oraz funkcja $r(h,k)$ takie, że dla dostatecznie małych $|h|,|k|$

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+r(h,k) \tag{8}$$

przy czym

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{r(h,k)}{|(h,k)|}=0 \tag{9}$$

(przypominamy, że wyrażenie

$$|(h,k)|=\sqrt{h^2+k^2}$$

jest normą punktu (h,k) - por. rozdz.I punkt 3).

Warunki (8), (9) oznaczają, że przyrost funkcji różniczkowalnej można dobrze aproksymować przez funkcję liniową przyrostów zmiennych niezależnych h,k tzn. z błędem $r(h,k)$, który szybko dąży do zera przy $h\to 0, k\to 0$.

Z warunków (8), (9) wynika łatwo

Twierdzenie 1. *Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie (a,b), to ma ona w tym punkcie obie pochodne cząstkowe f_x, f_y i przy tym*

$$f_x(a,b)=A, \qquad f_y(a,b)=B. \tag{10}$$

DOWÓD. Przyjmując $k=0$ w (8) dostajemy

$$\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=A+\frac{r(h,0)}{h}$$

skąd, przechodząc do granicy przy $h\to 0$ i korzystając z (9) dostajemy pierwszą z równości (10). Dowód drugiej równości jest podobny i pozostawiamy go Czytelnikowi. □

Funkcję liniową zmiennych h,k

$$df(a,b;h,k)=h\,f_x(a,b)+k\,f_y(a,b)$$

nazywamy *różniczką funkcji* f *w punkcie* (a,b). Różniczkowalność funkcji oznacza więc, że jej przyrost można aproksymować przez różniczkę z błędem, który szybko dąży do zera przy $h,k\to 0$.

Przykład 5. Funkcja

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}\quad \text{dla}\quad (x,y)\neq(0,0),\qquad\qquad f(0,0)=0$$

rozważana w Przykładzie 3 ma obie pochodne cząstkowe f_x,f_y w punkcie $(0,0)$ ale nie jest różniczkowalna w tym punkcie. Istotnie, w przypadku różniczkowalności mielibyśmy zgodnie z równością (8) i twierdzeniem 1

$$r(h,k)=f(h,k)$$

i wobec tego dla $(h,k)\neq(0,0)$

$$t(h,k)=\frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{hk}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}. \tag{11}$$

Przyjmując $h=k$ w (11) dostajemy

$$t(h,h)=\frac{1}{2\sqrt{2}|h|},$$

skąd widać, że warunek (9) nie jest spełniony.

Podany przykład wskazuje, że funkcja dwóch zmiennych może mieć obie pochodne cząstkowe ale nie być różniczkowalna. Jest to sytuacja odmienna, niż w przypadku funkcji jednej zmiennej, gdzie różniczkowalność jest równoważna istnieniu pochodnej.

Podobnie, jak dla funkcji jednej zmiennej, zachodzi twierdzenie

Twierdzenie 2. *Jeżeli funkcja* $f(x,y)$ *jest różniczkowalna w punkcie* (a,b)*, to jest ciągła w tym punkcie.*

DOWÓD. Dla dowodu oszacujemy przyrost funkcji f odpowiadający przyrostom h,k zmiennych niezależnych. Wobec (8) mamy

$$|f(a+h,b+k)-f(a,b)|\leq|A||h|+|B||k|+|r(h,k)|. \tag{12}$$

Z warunku (9) wynika, że do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać liczbę $\delta > 0$ tak, by dla $(h,k) \neq (0,0)$ spełniających warunek

$$|h| < \delta, \qquad |k| < \delta \tag{13}$$

zachodziła nierówność

$$|r(h,k)| < \frac{1}{3}\,\varepsilon|(h,k)| < \frac{1}{3}\,\varepsilon \tag{14}$$

(nie zmniejszając ogólności możemy założyć, że $|(h,k)| < 1$ dla (h,k) spełniających (13)). Jeżeli $A = B = 0$, to z (12) i (14) wynika nierówność

$$|f(a+h,b+k) - f(a,b)| < \varepsilon \tag{15}$$

dla h,k spełniających (13). Jeżeli zaś stałe A,B nie są równe zeru, to oprócz (13) należy przyjąć dodatkowo, że przyrosty h,k spełniają warunki (lub jeden z nich)

$$|h| < \frac{\varepsilon}{3|A|}, \qquad |k| < \frac{\varepsilon}{3|B|}$$

i wówczas również otrzymujemy (15). Zgodnie z twierdzeniem 7 rozdz.I oznacza to ciągłość funkcji f w punkcie (a,b). □

Podobnie, jak dla funkcji jednej zmiennej, twierdzenie odwrotne nie jst prawdziwe. Funkcja ciągła może nie być różniczkowalna, jak wskazuje następujący przykład.

Przykład 6. Rozważmy funkcję

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}.$$

Łatwo pokazać opierając się na twierdzeniu 6 rozdz.I, że jest ona ciągła w punkcie $(0,0)$. Istotnie, jeżeli $(x_n,y_n) \to (0,0)$, to $|x_n y_n| \to 0$ a zatem z ciągłości pierwiastka wynika, że również $f(x_n,y_n) \to 0 = f(0,0)$. Okażemy, że funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$. Ponieważ $f(h,0) = f(0,k) = f(0,0) = 0$, mamy

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0,$$

w przypadku różniczkowalności zgodnie z (8) i twierdzeniem 1 zachodziłaby więc równość

$$f(h,k) = r(h,k). \tag{16}$$

Przyjmując $h = k$ w (16) otrzymujemy

$$\frac{r(h,h)}{\sqrt{2h^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

to jednak oznacza, że warunek (9) nie jest spełniony.

Twierdzenie 3. *Załóżmy, że*

(i) *funkcja f jest określona i ma pochodne cząstkowe f_x, f_y w każdym punkcie (x, y) spełniającym* (1),

(ii) *pochodne f_x, f_y są funkcjami ciągłymi w punkcie (a, b).*

Wówczas funkcja f jest różniczkowalna w punkcie (a, b).

DOWÓD. Przyrost funkcji f występujący po lewej stronie (8) możemy zapisać w postaci

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \Big[f(a+h, b+k) - f(a+h, b)\Big] + + \Big[f(a+h, b) - f(a, b)\Big]$$

czyli

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \Big[p(b+k) - p(b)\Big] + \Big[q(a+h) - q(a)\Big],$$

gdzie

$$p(y) = f(a+h, y), \qquad q(x) = f(x, b).$$

Z założeń twierdzenia wynika, że funkcje jednej zmiennej p, q mają pierwszą pochodną, możemy więc zastosować do nich twierdzenie Lagrange'a, co daje

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = kp'(b + \Theta_1 k) + hq'(a + \Theta_2 h)$$

czyli po obliczeniu pochodnych

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = hf_x(a + \Theta_2 h, b) + kf_y(a+h, b + \Theta_1 k), \tag{17}$$

gdzie liczby Θ_1, Θ_2 należą do przedziału $(0, 1)$. Oznaczając

$$A = f_x(a, b), \qquad B = f_y(a, b)$$

możemy (17) zapisać w postaci

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + h\alpha(h, k) + k\beta(h, k), \tag{18}$$

gdzie

$$\alpha(h, k) = f_x(a + \Theta_2 h, b) - f_x(a, b), \qquad \beta(h, k) = f_y(a+h, b + \Theta_1 k) - f_y(a, b).$$

Z założenia (ii) wynika, że

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \alpha(h, k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \beta(h, k) = 0$$

natomiast moduł każdego z ułamków

$$\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}, \qquad \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

nie przekracza jedności. Wobec tego przyjmując

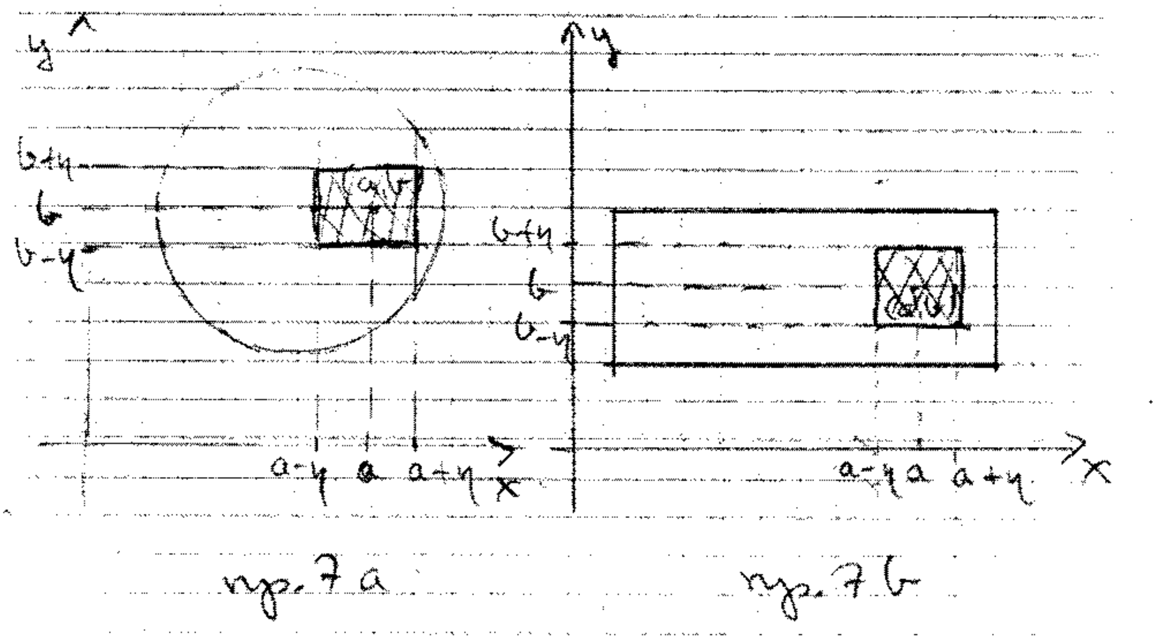
$$r(h,k) = \alpha(h,k)h + \beta(h,k)k$$

mamy

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

a to wobec (18) zapewnia różniczkowalność funkcji f w punkcie (a,b). $\square$

Mówimy, że zbiór $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jest *otwarty*, jeżeli do każdego punktu $(a,b) \in \Omega$ istnieje takie $\eta > 0$, że punkty (x,y) spełniające (1) również należą do Ω. Przykładami zbiorów otwartych są: cała płaszczyzna $\mathbb{R}^2$, wnętrze koła, wnętrze prostokąta (por. rys.7). Zauważmy, że aby rozważać pochodne cząstkowe funkcji f w dowolnym punkcie zbioru Z, w którym jest ona określona, musimy założyć, że jest to zbiór otwarty - tylko wtedy bowiem ilorazy różnicowe występujące w definicji pochodnych są określone dla dowolnego punktu $(a,b) \in Z$, przynajmniej dla dostatecznie małych $|h|, |k|$.



[rys. 7a], [rys. 7b]

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym. Będziemy mówili, że funkcja f jest klasy C^1 w zbiorze Ω, jeżeli

(a) w każdym punkcie zbioru Ω istnieją pochodne cząstkowe f_x, f_y

oraz

(b) pochodne te są ciągłe w każdym punkcie zbioru Ω.

Zapisujemy: f jest klasy $C^1(\Omega)$ lub $f \in C^1(\Omega)$.

Z twierdzenia 3 wynika jako prosty wniosek

Twierdzenie 4. *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym. Jeżeli funkcja f jest klasy $C^1(\Omega)$, to jest różniczkowalna w każdym punkcie $(a,b) \in \Omega$.*

Uwaga. Z twierdzenia 2 wynika natychmiast, że funkcja klasy C^1 w zbiorze Ω jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Przykład 7. Niech
$$f(x,y) = \log(1 - \sqrt{x^2 + y^2}).$$
Funkcja f jest określona dla $x^2 + y^2 < 1$ czyli w kole otwartym (tj. bez ograniczającego go okręgu) K o środku $(0,0)$ i promieniu 1. Jak łatwo sprawdzić, K jest zbiorem otwartym (por. rys. 7). Oznaczmy przez K_+ ćwiartkę koła K określoną nierównościami $x > 0$, $y > 0$. Różniczkując otrzymujemy dla $(x,y) \in K_+$
$$f_x(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad f_y(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}}.$$
Mianowniki obu wyrażeń są różne od zera dla $(x,y) \in K_+$, ponadto funkcja
$$g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$
jest ciągła w dowolnym punkcie płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ (proste sprawdzenie w oparciu o twierdzenie 6 rozdz. I pozostawiamy Czytelnikowi), wobec tego funkcje f_x i f_y są ciągłe w zbiorze K_+ na mocy twierdzenia 8 rozdz. I. Zatem $f \in C^1(K_+)$ i z twierdzenia 4 wynika, że f jest różniczkowalna w dowolnym punkcie $(a,b) \in K_+$.

3. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów. Załóżmy, że funkcja f jest określona w zbiorze otwartym Ω i ma w każdym punkcie tego zbioru pochodne cząstkowe pierwszego rzędu f_x, f_y. Pochodne (o ile istnieją)
$$\text{(a)}\ \ \frac{\partial}{\partial x} f_x, \qquad \text{(b)}\ \ \frac{\partial}{\partial y} f_x, \qquad \text{(c)}\ \ \frac{\partial}{\partial x} f_y, \qquad \text{(d)}\ \ \frac{\partial}{\partial y} f_y$$
nazywamy *pochodnymi cząstkowymi drugiego rzędu* funkcji f. Pochodne (b) i (c) noszą nazwę *pochodnych mieszanych drugiego rzędu.* W podobny sposób można wprowadzić pochodne cząstkowe rzędu wyższego niż dwa.

Dla pochodnych cząstkowych drugiego rzędu używane są oznaczenia
$$\frac{\partial}{\partial x} f_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = f_{xy},$$
$$\frac{\partial}{\partial x} f_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = f_{yx}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

Przykład 8. Znajdziemy pochodne mieszane drugiego rzędu w punkcie $(0,0)$ funkcji f określonej następująco:
$$f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0) = 0.$$

Zaczniemy od obliczenia pochodnych pierwszego rzędu $f_x(0,y)$ oraz $f_y(x,0)$ dla dowolnych x, y. Ponieważ $f(0,y)=f(x,0)=0$, mamy

$$f_x(0,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)}{h}=\lim_{h\to 0} y\,\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2}=-y$$

oraz

$$f_y(x,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,k)}{k}=\lim_{k\to 0} x\,\frac{x^2-k^2}{x^2+k^2}=x$$

i wobec tego

$$\frac{\partial}{\partial y}f_x(0,y)=-1,\qquad \frac{\partial}{\partial x}f_y(x,0)=1$$

dla dowolnych x,y. Przyjmując w szczególności $x=y=0$ dostajemy

$$f_{xy}(0,0)=-1,\qquad f_{yx}(0,0)=1.$$

Podany przykład wskazuje, że przy obliczaniu pochodnych wyższych rzędów wynik może zależeć od kolejności, w jakiej wykonujemy różniczkowanie względem poszczególnych zmiennych. W szczególności pochodne mieszane drugiego rzędu mogą nie być równe.

Udowodnimy teraz twierdzenie, które podaje warunek dostateczny równości pochodnych mieszanych drugiego rzędu.

Twierdzenie 5. *Załóżmy, że*

(i) *pochodne pierwszego rzędu f_x, f_y oraz pochodne mieszane f_{xy}, f_{yx} istnieją dla (x,y) spełniających warunek* (1) *przy pewnym $\eta>0$,*

(ii) *pochodne mieszane są ciągłe w punkcie (a,b).*

Wówczas $f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$.

DOWÓD. Niech przy ustalonych h,k

$$\Phi(a,b)=f(a+h,b+k)-f(a+h,b)-f(a,b+k)+f(a,b).$$

Wprowadzając funkcję

$$\varphi(x,y)=f(x+h,y)-f(x,y)$$

mamy

$$\Phi(a,b)=\varphi(a,b+k)-\varphi(a,b). \tag{19}$$

Z założenia (i) wynika, że funkcje jednej zmiennej $\varphi(a,y)$ oraz $f_y(x,b+k)$ mają pierwszą pochodną dla x,y spełniających (1) i $|k|<\eta$, możemy więc zastosować do nich twierdzenie Lagrange'a i zapisać (19) w postaci

$$\Phi(a,b)=k\varphi_y(a,b+\Theta k)=k\Big(f_y(a+h,b+\Theta k)-f_y(a,b+\Theta k)\Big),$$

skąd następnie otrzymujemy

$$\Phi(a,b) = khf_{yx}(a + \Theta_1 h, b + \Theta k). \tag{20}$$

Podobnie, wprowadzając funkcję

$$\psi(x,y) = f(x, y+k) - f(x,y)$$

dostajemy

$$\Phi(a,b) = \psi(a+h,b) - \psi(a,b) \tag{21}$$

i stosując dwukrotnie twierdzenie Lagrange'a (na co pozwala założenie (i)) zapisujemy (21) w postaci

$$\Phi(a,b) = h\psi_x(a+\Theta_2 h, b) = h\Big(f_x(a+\Theta_2 h, b+k) - f_x(a+\Theta_2 h, b)\Big)$$

skąd następnie wynika, że

$$\Phi(a,b) = hkf_{xy}(a+\Theta_2 h, b+\Theta_3 k). \tag{22}$$

Równości (20) i (22) dają

$$f_{yx}(a+\Theta_1 h, b+\Theta k) = f_{xy}(a+\Theta_2 h, b+\Theta_3 k), \tag{23}$$

przy czym liczby Θ, Θ_1, Θ_2, Θ_3 należą do przedziału $(0,1)$. Przechodząc w równości (23) do granicy przy $h,k \to 0$ i korzystając z założenia (ii) dostajemy tezę twierdzenia. □

4. Różniczkowanie funkcji złożonej (superpozycji).

Zacznijmy od przykładu fizycznego. Załóżmy, że w pomieszczeniu wprowadzono prostokątny układ współrzędnych, przy czym oś z-ów jest skierowana pionowo oraz że temperatura w punkcie (x,y,z) tego pomieszczenia zależy tylko od zmiennych x, y. Inaczej mówiąc, temperatura w pomieszczeniu określona jest przez funkcję $f(x,y)$. Przypuśćmy teraz, że w pomieszczeniu porusza się punkt materialny P, którego współrzędne w chwili t wynoszą $x(t), y(t), z(t)$. Wobec tego temperaturę punktu w chwili t określa wyrażenie

$$f(x(t), y(t)) = F(t) \tag{24}$$

Wyrażenie takie nazywamy *funkcją złożoną* lub inaczej *superpozycją*. Prędkość, z jaką zmienia się w czasie temperatura punktu P jest równa

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{F(t+\tau) - F(t)}{\tau} = \frac{dF}{dt}(t),$$

jest to więc pochodna funkcji złożonej $F(t)$. Powstaje pytanie, jak można obliczyć tą pochodną, znając funkcje $f(x,y)$, $x(t)$, $y(t)$. Odpowiedź daje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6. *Niech $f(x,y)$ będzie funkcją określoną w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ i niech $x(t), y(t)$ będą funkcjami określonymi w pewnym przedziale $\mathbb{P}$ na osi rzeczywistej, przy czym $(x(t), y(t)) \in \Omega$ dla $t \in \mathbb{P}$.*
Zakładając, że
(i) *pochodne cząstkowe f_x, f_y istnieją i są ciągłe w zbiorze Ω*
oraz
(ii) *funkcje $x(t), y(t)$ mają pierwszą pochodną w przedziale $\mathbb{P}$,*
przyjmijmy oznaczenie (24).
Wówczas funkcja $F(t)$ ma pochodną w przedziale $\mathbb{P}$ i zachodzi równość

$$\frac{dF}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} \qquad (t \in \mathbb{P}) \tag{25}$$

DOWÓD. Przy ustalonych t, h przyrost funkcji F możemy zapisać w postaci

$$F(t+h)-F(t) = \Big(f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t+h))\Big) + \Big(f(x(t), y(t+h)) - f(x(t), y(t))\Big)$$

czyli

$$F(t+h) - F(t) = \Big(p(x(t+h)) - p(x(t)\Big) + \Big(q(y(t+h)) - q(y(t))\Big), \tag{26}$$

gdzie

$$p(x) = f(x, y(t+h)), \qquad q(y) = f(x(t), y).$$

Z założeń twierdzenia wynika, że dla małych $|h|$ funkcje jednej zmiennej p, q mają pierwszą pochodną i można wobec tego stosować do nich twierdzenie Lagrange'a. Oznaczając

$$\Delta x = x(t+h) - x(t), \qquad \Delta y = y(t+h) - y(t)$$

dostajemy z (26)

$$F(t+h) - F(t) = p'\Big(x(t) + \Theta_1 \Delta x\Big)\, \Delta x + q'\Big(y(t) + \Theta_2 \Delta y\Big)\, \Delta y$$

czyli po obliczeniu pochodnych

$$F(t+h) - F(t) = f_x\Big(x(t) + \Theta_1 \Delta x, y(t+h)\Big)\, \Delta x + f_y\Big(x(t), y(t) + \Theta_2 \Delta y\Big)\, \Delta y, \tag{27}$$

przy czym liczby Θ_1, Θ_2 należą do przedziału $(0,1)$. Z (27) wynika, że

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = f_x\Big(x(t) + \Theta_1 \Delta x, y(t+h)\Big)\, \frac{\Delta x}{h} + f_y\Big(x(t), y(t) + \Theta_2 \Delta y\Big)\, \frac{\Delta y}{h}. \tag{28}$$

Funkcje $x(t), y(t)$ mają pierwszą pochodną na mocy (i), są więc ciągłe i zatem $\Delta x \to 0$ oraz $\Delta y \to 0$ przy $h \to 0$. Przechodząc do granicy w (28) i korzystając z ciągłości pochodnych f_x, f_y dostajemy (25). $\square$

Udowodnione twierdzenie łatwo przenieść na przypadek funkcji złożonej postaci

$$F(t,s) = f(x(t,s), y(t,s)). \tag{29}$$

Twierdzenie 7. *Niech $f(x,y)$ będzie funkcją określoną w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ i niech $x(t,s), y(t,s)$ będą funkcjami określonymi w zbiorze otwartym $\Xi \subset \mathbb{R}^2$, przy czym $\Big(x(t,s), y(t,s)\Big) \in \Omega$ dla $(t,s) \in \Xi$. Zakładając, że*

(i) *pochodne cząstkowe f_x, f_y istnieją i są ciągłe w zbiorze Ω*

oraz

(ii) *funkcje $x(t,s), y(t,s)$ mają pierwsze pochodne cząstkowe w zbiorze Ξ, przyjmijmy oznaczenie* (29).

Wówczas funkcja $F(t,s)$ ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w zbiorze Ξ i zachodzą równości

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= f_x \frac{\partial x}{\partial t} + f_y \frac{\partial y}{\partial t}, \\ \frac{\partial F}{\partial s} &= f_x \frac{\partial x}{\partial s} + f_y \frac{\partial y}{\partial s}. \end{aligned} \tag{30}$$

DOWÓD. Wzory (30) wynikają natychmiast ze wzoru (25), jeżeli zauważymy, że pochodną cząstkową $\frac{\partial F}{\partial t}$ lub $\frac{\partial F}{\partial s}$ możemy uważać za pochodną funkcji jednej zmiennej przy założeniu, że druga zmienna została ustalona. Proponujemy Czytelnikowi przeprowadzenie szczegółowego rachunku, podobnego jak w dowodzie twierdzenia 6. □

Przykład 9. Niech

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

oraz

$$x(t) = A\sin t, \qquad y(t) = A\cos t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

- zatem punkt $\Big(x(t), y(t)\Big)$ przy zmiennym t porusza się po okręgu koła o środku w początku układu i promieniu A. Przyjmując oznaczenie (24) i stosując regułę (25) dostajemy

$$\frac{dF}{dt} = 2A^2 \sin t \cos t - 2A^2 \cos t \sin t = 0.$$

Zauważmy, że ten sam wynik możemy otrzymać bezpośrednio, bowiem

$$F(t) = A^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = A^2,$$

$F(t)$ jest więc funkcją stałą.

Przykład 10. Niech, podobnie jak poprzednim przykładzie,

$$f(x,y) = x^2 + y^2,$$

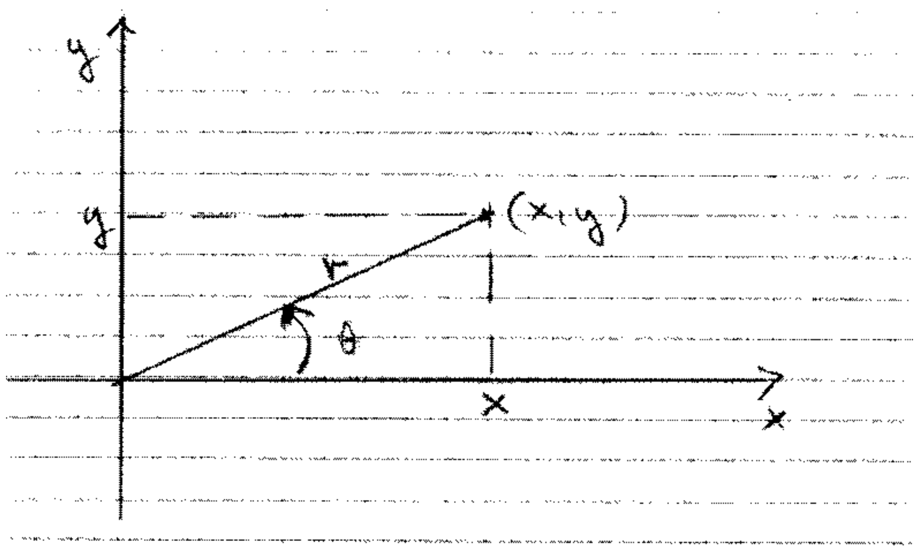
zaś x, y niech będą funkcjami dwóch zmiennych

$$x(r,\theta) = r\cos\theta, \qquad y(r,\theta) = r\sin\theta, \qquad r > 0, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{31}$$

Zmienne r, θ nazywamy *współrzędnymi biegunowymi* punktu (x, y) - por. rys. 8. Ze wzorów (31) wynika, że

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

zatem zmienna r (zwana *promieniem wodzącym*) jest odległością punktu $P = (x, y)$ od początku układu, natomiast θ oznacza kąt między dodatnią półosią x-ów a wektorem $\overrightarrow{OP}$ (tzn. kąt, o jaki należy obrócić dokoła początku układu dodatnią półoś x-ów, aby przyjęła kierunek i zwrot wektora $\overrightarrow{OP}$). Aby otrzymać wszystkie punkty (x, y) płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ wystarczy założyć we wzorach (31), że $0 \leq \theta < 2\pi$ oraz przyjąc dodatkowo dowolnie ustalone θ dla $r = 0$.



[rys. 8]

Przyjmując oznaczenie (29) z zastąpieniem (t, s) przez r, θ obliczymy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji $F(r, \theta)$ stosując regułę (30). Otrzymujemy

$$\frac{\partial F}{\partial r} = (2x\cos\theta + 2y\sin\theta),$$

co po wykorzystaniu (31) daje

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 2r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2r$$

oraz

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -2xr\sin\theta + 2yr\cos\theta,$$

czyli wobec (31)

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -2r^2\cos\theta\sin\theta + 2r^2\sin\theta\cos\theta = 0.$$

Zauważmy, że ten sam wynik można otrzymać bezpośrednio, jeżeli zauważymy, że wobec (31)

$$F(r,\theta) = r^2.$$

Przykład 11. Rozważmy strunę sprężystą, która w położeniu równowagi leży na osi x-ów i którą wprawiono w ruch nadając jej punktom pewne wychylenie lub pewną prędkość początkową. Zakładamy, że oś x-ów jest zorientowana w zwykły sposób tzn. że liczby dodatnie znajdują się na prawo od początku układu. Niech $u(x,t)$ oznacza wychylenie z położenia równowagi punktu x struny w chwili t. Można okazać, że jeżeli wychylenie nie jest zbyt duże, to funkcja $u(x,t)$ spełnia z dobrym przybliżeniem równanie różniczkowe

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \tag{32}$$

gdzie stała dodatnia a zależy od parametrów fizycznych struny. Równanie (32) nosi nazwę *równania struny drgającej.* Rozważmy abstrakcyjny przypadek struny nieograniczonej tzn. wypełniającej w położeniu równowagi całą oś x-ów. Okażemy, że funkcja

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at), \qquad (x \in \mathbb{R},\ t > 0) \tag{33}$$

gdzie f, g są funkcjami jednej zmiennej klasy C^2, spełnia równanie (32). Oznaczając

$$\xi = x + at, \qquad \eta = x - at \tag{34}$$

możemy (33) zapisać w postaci

$$u(x,t) = f\Big(\xi(x,t)\Big) + g\Big(\eta(x,t)\Big),$$

zatem $u(x,t)$ jest sumą dwóch funkcji złożonych i do obliczenia jej pochodnych zastosujemy wzór (30) (łatwe sprawdzenie, że założenia twierdzenia są spełnione, pozostawiamy Czytelnikowi). Otrzymujemy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'\,\frac{\partial \xi}{\partial x} + g'\,\frac{\partial \eta}{\partial x},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = f'\,\frac{\partial \xi}{\partial t} + g'\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

czyli po zróżniczkowaniu funkcji (34)

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= f'(\xi(x,t)) + g'(\eta(x,t)), \\ u_t(x,t) &= a\Big(f'(\xi(x,t)) - g'(\eta(x,t))\Big). \end{aligned} \tag{35}$$

Aby obliczyć drugie pochodne funkcji $u(x,t)$ różniczkujemy (35) stosując ponownie wzór (30), co daje

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = f''\frac{\partial \xi}{\partial x} + g''\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = a\Big(f''\frac{\partial \xi}{\partial t} - g''\frac{\partial \eta}{\partial t}\Big),$$

czyli po obliczeniu pochodnych funkcji (34)

$$u_{xx}(x,t) = f''(\xi(x,t)) + g''(\eta(x,t)),$$
$$u_{tt}(x,t) = a^2\Big(f''(\xi(x,t)) + g''(\eta(x,t))\Big). \tag{36}$$

Ze wzorów (36) widać, że funkcja $u(x,t)$ spełnia równanie struny drgającej (32).

Aby odczytać interpretację fizyczną rozwiązania (33) załóżmy na chwilę, że funkcja g jest równa zeru, zatem

$$u(x,t) = f(x+at). \tag{37}$$

Dla dowolnych $(x_1,t_1),(x_2,t_2)$ $(t_1 < t_2)$ zachodzi równość

$$u(x_1,t_1) = u(x_2,t_2)$$

wtedy, gdy

$$x_1 + at_1 = x_2 + at_2$$

czyli

$$x_2 - x_1 = a(t_1 - t_2).$$

Zostatniej równości widać, że wychylenie struny z położenia równowagi określone wzorem (37) w miarę upływu czasu przesuwa się po strunie w lewo (bo $x_2 < x_1$) z prędkością a. Podobnie można okazać, że wychylenie struny z położenia równowagi dane wzorem

$$u(x,t) = g(x-at)$$

przesuwa się po strunie w prawo z tą samą prędkością a. W ogólnym przypadku rozwiązanie (33) równania struny drgającej jest sumą dwóch zaburzeń rozchodzących się po strunie z prędkością a w przeciwnych kierunkach. Postać funkcji f,g zależy od zaburzenia, jakie nadano strunie w chwili początkowej $t=0$.

Dla funkcji $f(x,y)$ określonej w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ wprowadzimy wektor

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = [f_x, f_y]$$

oraz wyrażenie (zwane *laplasjanem*)

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}.$$

Długość wektora $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ obliczamy według wzoru

$$|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2},$$

zatem

$$|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f|^2 = f_x^2 + f_y^2.$$

Przykład 12. Wprowadźmy na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ współrzędne biegunowe

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{38}$$

(por. Przykład 10 i rys. 8) i niech $w(x,y)$ będzie funkcją klasy C^1 w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nie zawierającym początku układu współrzędnych. Znajdziemy postać wyrażenia $|\operatorname{grad} w|^2$ we współrzędnych biegunowych.

W dalszym ciągu pochodne cząstkowe funkcji $w(x,y)$ będziemy oznaczali przez w_x, w_y, natomiast pochodne cząstkowe superpozycji przez $w(r\cos\theta, r\sin\theta)$ przez w_r, w_θ. Inaczej mówiąc, oznaczamy tą samą literą funkcję wyjściową w oraz funkcję złożoną - ma to uzasadnienie, gdy w jest pewną wielkością fizyczną, którą wyrażamy, zależnie od potrzeby, bądź we współrzędnych prostokątnych bądź we współrzędnych biegunowych.

W oparciu o wzory (30) mamy

$$\begin{aligned} w_x &= w_r \frac{\partial r}{\partial x} + w_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ w_y &= w_r \frac{\partial r}{\partial y} + w_\theta \frac{\partial \theta}{\partial y}. \end{aligned} \tag{39}$$

Zauważmy jednak, że do znalezienia pochodnych w_x, w_y przy użyciu wzorów (39) potrzebna jest znajomość funkcji $r(x,y)$ i $\theta(x,y)$ oraz ich pochodnych, należy zatem rozwiązać równania (38) względem r, θ a następnie zróżniczkować otrzymane rozwiązania. Wymaga to dość uciążliwych rachunków, dlatego postąpimy inaczej.

Stosując do funkcji złożonej $w(r\cos\theta, r\sin\theta)$ wzory (30) otrzymujemy

$$\begin{aligned} w_r &= w_x \frac{\partial x}{\partial r} + w_y \frac{\partial y}{\partial r}, \\ w_\theta &= w_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + w_y \frac{\partial y}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

czyli po zróżniczkowaniu (38)

$$\begin{aligned} w_r &= w_x \cos\theta + w_y \sin\theta, \\ w_\theta &= -w_x\, r\sin\theta + w_y\, r\cos\theta. \end{aligned} \tag{40}$$

Wzory (40) można traktować jako układ równań liniowych z niewiadomymi w_x, w_y i rozwiązać go stosując wzory Cramera. Wyznacznik układu ma postać

$$D = \begin{vmatrix} \cos\theta, & \sin\theta \\ -r\sin\theta, & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$

jest zatem różny od zera w obszarze Ω, natomiast oznaczając odpowiednio przez D_1, D_2 wyznaczniki, w których kolumnę współczynników przy niewiadomej w_x, w_y zastąpiono przez kolumnę wyrazów wolnych dostajemy

$$D_1 = \begin{vmatrix} w_r, & \sin\theta \\ w_\theta, & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

oraz

$$D_2 = \begin{vmatrix} \cos\theta, & w_r \\ -r\sin\theta, & w_\theta \end{vmatrix}.$$

Rozwiązanie układu (40) ma zatem postać

$$\begin{aligned} w_x &= w_r \cos\theta - w_\theta \frac{\sin\theta}{r}, \\ w_y &= w_r \sin\theta + w_\theta \frac{\cos\theta}{r}. \end{aligned} \tag{41}$$

Korzystając z (41) otrzymujemy po prostym rachunku

$$|\overrightarrow{\text{grad}}\, w|^2 = w_r^2 + \frac{1}{r^2} w_\theta^2.$$

Przykład 13. Podobnie, jak w Przykładzie 12, będziemy rozważać funkcję $w(x,y)$ określoną w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nie zawierającym początku układu współrzędnych i superpozycję $w(r\cos\theta, r\sin\theta)$, przy czym założymy, że funkcja $w(x,y)$ jest klasy C^2 w zbiorze Ω. Naszym celem jest wyrażenie laplasjanu funkcji w we współrzędnych biegunowych (38). Zauważmy najpierw, że wzory (41) można potraktować jako regułę różniczkowania przy użyciu współrzędnych biegunowych, którą zapiszemy w postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned} \tag{42}$$

Stosując (42) kolejno do funkcji w_x, w_y dostajemy

$$\begin{aligned} w_{xx} &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} w_x - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} w_x, \\ w_{yy} &= \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} w_y + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} w_y. \end{aligned} \tag{43}$$

Pochodne występujące po prawej stronie wzorów (43) obliczamy, różniczkując (41). Po wstawieniu wyniku do wzorów (43) i dodaniu pochodnych w_{xx}, w_{yy} dostajemy ostatecznie

$$\Delta w = w_{rr} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\theta\theta}.$$

Proponujemy Czytelnikowi przeprowadzenie szczegółowego rachunku.

Otrzymane reguły rachunkowe (25), (30) dają się łatwo przenieść na przypadek funkcji trzech zmiennych. Najpierw przeniesiemy na przypadek trójwymiarowy definicję zbioru otwartego, podaną poprzednio (punkt 2) dla zbiorów na płaszczyźnie. Mówimy, że zbiór

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ jest *otwarty*, jeżeli do każdego punktu $(a, b, c) \in \Omega$ istnieje takie $\eta > 0$, że punkty (x, y, z) spełniające warunek

$$|x - a| < \eta, \qquad |y - b| < \eta, \qquad |z - c| < \eta \tag{44}$$

również należą do Ω. W dalszym ciągu będziemy zakładali, że rozważane funkcje są określone w zbiorach otwartych -zapewnia to możliwość utworzenia ilorazów różnicowych występujących w definicji pochodnych cząstkowych. Definicja funkcji klasy C^1 w zbiorze otwartym Ω, podana w punkcie 2 dla funkcji dwóch zmiennych, przenosi się bez zmian na przypadek funkcji trzech zmiennych.

Twierdzenie 8. *Niech $f(x, y, z)$ będzie funkcją określoną w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ i niech $x(t, s, r)$, $y(t, s, r)$, $z(t, s, r)$ będą funkcjami określonymi w zbiorze otwartym $\Xi \subset \mathbb{R}^3$, przy czym $\Big(x(t, s, r), y(t, s, r), z(t, s, r)\Big) \in \Omega$ dla $(t, s, r) \in \Xi$. Zakładając, że*

(i) *pochodne cząstkowe f_x, f_y, f_z istnieją i są ciągłe w zbiorze Ω*

oraz

(ii) *funkcje $x(t, s, r)$, $y(t, s, r)$, $z(t, s, r)$ mają pierwsze pochodne cząstkowe w zbiorze Ξ, przyjmijmy oznaczenie*

$$F(t, s, r) = f\Big(x(t, s, r), y(t, s, r), z(t, s, r)\Big).$$

Wówczas funkcja $F(t, s, r)$ ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w zbiorze Ξ i zachodzą równości

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= f_x \frac{\partial x}{\partial t} + f_y \frac{\partial y}{\partial t} + f_z \frac{\partial z}{\partial t}, \\ \frac{\partial F}{\partial s} &= f_x \frac{\partial x}{\partial s} + f_y \frac{\partial y}{\partial s} + f_z \frac{\partial z}{\partial s}, \\ \frac{\partial F}{\partial r} &= f_x \frac{\partial x}{\partial r} + f_y \frac{\partial y}{\partial r} + f_z \frac{\partial z}{\partial r}. \end{aligned} \tag{45}$$

DOWÓD. Dowód należy zacząć od przypadku, gdy funkcje x, y, z zależą tylko od jednej zmiennej t i przeprowadzić rozumowanie podobne, jak w dowodzie twierdzenia 7 (oczywiście wzory (45) redukują się wówczas do pierwszej równości z zastąpieniem odpowiednich pochodnych cząstkowych przez pochodne funkcji jednej zmiennej). Sytuacja, gdy x, y, z zależą od trzech zmiennych, sprowadza się do przypadku już rozważanego jeżeli zauważymy, że pochodną cząstkową możemy uważać za pochodną funkcji jednej zmiennej przy założeniu, że pozostałe zmienne zostały ustalone. Szczegóły rachunkowe dowodu pozostawiamy Czytelnikowi. □

5. Pochodna kierunkowa.

Niech $f(x, y)$ będzie funkcją określoną w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ i niech $\vec{\nu} = [\alpha, \beta]$ będzie wektorem w płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Granicę (o ile istnieje)

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\alpha, b + t\beta) - f(a, b)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \vec{\nu}}(a, b) \tag{46}$$

nazywamy *pochodną kierunkową funkcji f w kierunku wektora $\vec{v}$ w punkcie* (a, b). Licznik ułamka po lewej stronie (46) jest równy przyrostowi wartości funkcji f, gdy jej argument ulega przesunięciu z punktu (a, b) w kierunku wektora $\vec{v}$. Długość tego przesunięcia wynosi

$$|(a + t\alpha, b + t\beta) - (a, b)| = |t|\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

i jest równa $|t|$, gdy $\vec{v}$ jest wersorem tzn. wektorem o długości jednostkowej. Interpretując t jako czas można pochodną kierunkową (46) uważać za miarę prędkości, z jaką zmienia się wartość funkcji f, gdy jej argument porusza się w kierunku $\vec{v}$.

Zauważmy, że przyjmując

$$g(t) = f(a + t\alpha, b + t\beta)$$

mamy

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a, b) = g'(0).$$

Jeżeli f ma ciągłe pierwsze pochodne cząstkowe w Ω, to stosując regułę (25) dostajemy stąd

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a, b) = \alpha f_x(a, b) + \beta f_y(a, b). \tag{47}$$

Prawa strona równości (47) jest iloczynem skalarnym wektorów $\vec{v}$ i $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$, możemy więc ją zapisać krócej

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = (\vec{v}, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f). \tag{48}$$

Wzory (47) i (48) dają praktyczny sposób obliczania pochodnej kierunkowej bez odwoływania się do definicji.

Jeżeli wprowadzimy wersory osi układu współrzędnych na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$

$$\vec{i} = [1, 0], \qquad \vec{j} = [0, 1],$$

to z definicji (46) wynika, że

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(a, b) = f_x(a, b), \qquad \frac{\partial f}{\partial \vec{j}}(a, b) = f_y(a, b).$$

Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu są więc pochodnymi kierunkowymi w kierunku wersorów osi układu współrzędnych.

Przykład 14. Niech

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad \text{dla} \quad (x, y) \neq (0, 0), \qquad f(0, 0) = 0$$

i niech $\nu = [\alpha, \beta]$ będzie dowolnym wektorem na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Mamy dla $t \neq 0, \alpha \neq 0$

$$\frac{f(\alpha t, \beta t) - f(0,0)}{t} = \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^4 t^2},$$

co po przejściu do granicy przy $t \to 0$ daje

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\nu}}(0,0) = \frac{\beta^2}{\alpha},$$

natomiast dla $\alpha = 0, t \neq 0$

$$\frac{f(0, \beta t) - f(0,0)}{t} = 0,$$

zatem po przejściu do granicy przy $t \to 0$ dostajemy

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\nu}}(0,0) = 0.$$

Widzimy więc, że funkcja f ma w punkcie $(0,0)$ pochodną kierunkową w kierunku dowolnego wektora. Wiemy natomiast (por. Przykład 7 rozdz. I), że funkcja f nie ma granicy w początku układu współrzędnych, nie jest więc ciągła w tym punkcie.

Zadania.

1. Znaleźć pochodne cząstkowe f_x, f_y, jeżeli

(i) $f(x,y) = xy\sin(x^2 - y^2)$, (ii) $f(x,y) = y\,(x+y)^4$, (iii) $f(x,y) = e^{x^2 - y^2}$.

2. Niech

(a) $f(x,y) = \sqrt{2x+y}$, (b) $f(x,y) = \log(x^2 - y^2)$, (c) $f(x,y) = (x^2 - y)^{xy}$.

Znaleźć dziedzinę funkcji f i narysować ją na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych. Czy dziedzina ta jest zbiorem otwartym?

3. Znaleźć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji podanych w zadaniu 2. W jakim zbiorze płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ określone są te pochodne?

4. Niech (por. Przykład 6)

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}.$$

Zbadać istnienie pochodnych cząstkowych $f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$ w dowolnym punkcie $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

5. Sprawdzić, że funkcja (por. Przykład 7 rozdz. I i Przykład 14)

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \quad \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0) = 0$$

nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$.

6. Niech

$$f(x,y) = xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0) = 0.$$

Znaleźć pochodne mieszane f_{xy} oraz f_{yx} w dowolnym punkcie $(x,y) \neq (0,0)$ i zbadać ich ciągłość w dowolnym punkcie płaszczyzny $\mathbb{R}^2$. Wynik porównać z twierdzeniem 5 i Przykładem 8.

7. Mówimy, że funkcja f określona na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ jest *jednorodna stopnia* m, jeżeli dla dowolnego $t > 0$ i dowolnego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ zachodzi równość

$$f(tx,ty) = t^m\, f(x,y). \tag{49}$$

Udowodnić, że funkcja f klasy $C^1(\mathbb{R}^2)$ jest jednorodna stopnia m wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi wzór Eulera

$$x\, f_x(x,y) + y\, f_y(x,y) = mf(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{50}$$

Wskazówka. Różniczkując (49) względem t i przyjmując $t = 1$ dostajemy (50) dla dowolnie ustalonego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Aby udowodnić, że z (50) wynika (49), należy rozważyć funkcję jednej zmiennej

$$g(t) = \frac{f(tx_0, ty_0)}{t^m}$$

(gdzie (x_0, y_0) jest chwilowo ustalonym punktem) i okazać, że jest to funkcja stała.

8. Znaleźć pochodne cząstkowe f_x, f_y, f_z, jeżeli

(i) $f(x,y,z) = x^2\cos(y+z) + y^2\sin(x-z) + z^2\cos(x+y)$, (ii) $f(x,y,z) = e^{x^2-y^2+2z^2}$.

9. Znaleźć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie $(0,0,0)$ funkcji (por. zadanie 11 rozdz.I)

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{|x|^3+|y|^3+|z|^3} \quad \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0,0) = 0.$$

10. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ wprowadzamy współrzędne sferyczne r, θ, ϕ przy pomocy wzorów

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\cos\phi, \\ y &= r\sin\theta\cos\phi, \\ z &= r\sin\phi, \\ (r &\geq 0,\ -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \theta < 2\pi). \end{aligned} \tag{51}$$

Podać interpretację geometryczną zmiennej r oraz kątów θ, ϕ. Jaki zbiór w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ określa równanie

$$\text{(i)} \quad r = r_0, \qquad \text{(ii)} \quad \phi = \phi_0, \qquad \text{(iii)} \quad \theta = \theta_0,$$

gdzie r_0, θ_0, ϕ_0 oznaczają stałe?

11. Niech

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

i niech

$$\begin{aligned} x &= A \cos t \cos s, \\ y &= A \cos t \sin s, \\ z &= A \sin t. \end{aligned}$$

Przyjmując oznaczenie

$$F(t, s) = f(x(t, s), y(t, s), z(t, s))$$

obliczyć pochodne cząstkowe F_t, F_s stosując wzory (45). Czy można obliczyć te pochodne w inny sposób?

12. Niech

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

i niech funkcje $x(r, \theta, \phi)$, $y(r, \theta, \phi)$, $z(r, \theta, \phi)$ będą określone wzorami (51). Przyjmując oznaczenie

$$F(r, \theta, \phi) = f\Big(x(r, \theta, \phi), y(r, \theta, \phi), z(r, \theta, \phi)\Big)$$

obliczyć pochodne cząstkowe F_r, F_θ, F_ϕ

a) opierając się na wzorach (45),

b) różniczkując funkcję F po uprzednim wyrażeniu jej przez zmienne r, θ, ϕ.

13. Niech

$$f(x, y) = \log(1 - \sqrt{x^2 + y^2})$$

i niech

$$K_0 = K \setminus \{(0, 0)\},$$

gdzie K oznacza koło otwarte o środku $(0, 0)$ i promieniu 1 (por. Przykład 7). Okazać, że

(i) pochodne $f_x(x_0, y_0)$ i $f_y(x_0, y_0)$ istnieją i są ciągłe w dowolnym punkcie $(x_0, y_0) \in K_0$;

(ii) nie istnieją pochodne $f_x(0, 0)$ oraz $f_y(0, 0)$.

Wskazówka. W punkcie (i) zauważyć, że przyjmując

$$g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

mamy

$$g(x, y) = \sqrt{z} \quad \text{gdzie} \quad z = x^2 + y^2$$

i zastosować twierdzenie o różniczkowaniu superpozycji. W punkcie (ii) wykorzystać znaną z początkowego kursu analizy równość

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$