Rozdział III

Wzór Taylora i ekstrema funkcji.

1. Twierdzenie o wartości średniej dla funkcji dwóch zmiennych.

Niech $f(x,y)$ będzie funkcją klasy C^1 w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ i niech $(a,b) \in \Omega$ będzie ustalonym punktem. Wówczas, jak wynika z twierdzenia 6 rozdz. II, funkcja jednej zmiennej

$$g(t) = f(a+th, b+tk)$$

jest, dla dostatecznie małych $|h|, |k|$, różniczkowalna w przedziale $[0,1]$ i można zastosować do niej w tym przedziale twierdzenie Lagrange'a w postaci

(1) $$g(t_0+\tau) = g(t_0) + \tau g'(\bar{t}),$$

gdzie $0 \le t_0 < \bar{t} < t_0+\tau \le 1$. Przyjmując w szczególności $t_0 = 0$, $\tau = 1$ dostajemy stąd

(2) $$g(1) = g(0) + g'(\bar{t}), \qquad (0 < \bar{t} < 1),$$

co po obliczeniu pochodnej funkcji g zgodnie ze wzorem (25) rozdz. II daje

(3) $$f(a+h, b+k) = f(a,b) + hf_x(\bar{x},\bar{y}) + kf_y(\bar{x},\bar{y}),$$

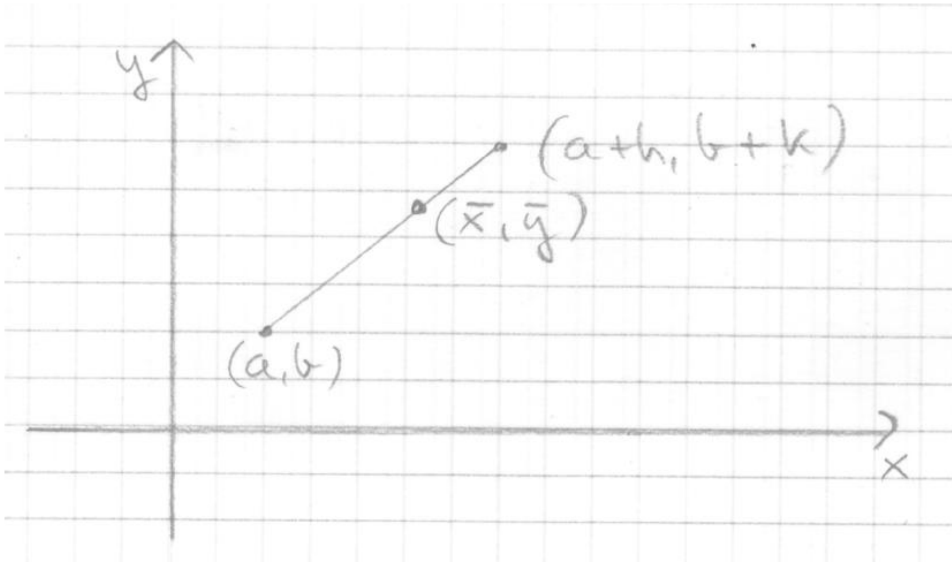
gdzie

$$\bar{x} = a + \bar{t}h, \qquad \bar{y} = b + \bar{t}k.$$

Równość (3) można zapisać inaczej

(4) $$f(a+h, b+k) - f(a,b) = df(\bar{x},\bar{y}; h,k),$$

gdzie df oznacza różniczkę funkcji f (por. rozdz. II punkt 2). Zauważmy, że wobec nierówności $0 < \bar{t} < 1$ punkt $\bar{x},\bar{y})$ leży na odcinku łączącym punkty (a,b) i $(a+h, b+k)$ (por. rys. 9).



[rys. 9]

Z przeprowadzonego rachunku wynika

Twierdzenie 1 (o wartości średniej). *Jeżeli f jest funkcją klasy C^1 w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, to przy dostatecznie małych $|h|, |k|$ przyrost funkcji f wyraża sie wzorem (3), gdzie $(\bar{x}, \bar{y})$ jest punktem leżącym na odcinku łączącym punkty (a, b) oraz $(a+h, b+k)$.*

2. Wzór Taylora dla funkcji dwóch zmiennych.

Załóżymy teraz, że f jest funkcją określoną w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ i mającą w tym zbiorze ciągłe pochodne cząstkowe do rzędu n włącznie oraz że $(a, b) \in \Omega$. Z twierdzenia 6 rozdz.II wynika wówczas, że funkcja jednej zmiennej

$$g(t) = f(a + th, b + tk)$$

jest (dla dostatecznie małych $|h|, |k|$) n-krotnie różniczkowalna w przedziale [0,1] i można zastosować do niej w tym przedziale wzór Taylora, co daje

$$g(t_0 + \tau) = g(t_0) + \tau g'(t_0) + \frac{\tau^2}{2} g''(t_0) + \cdots + \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n-1)}(t_0) + \frac{\tau^n}{n!} g^{(n)}(\bar{t}), \tag{5}$$

gdzie $0 \leq t_0 < \bar{t} < t_0 + \tau \leq 1$. Zajmiemy się szczególnym przypadkiem, gdy $n = 2$ przyjmując $t_0 = 0$, $\tau = 1$. Równość (5) ma teraz postać

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(\bar{t}), \tag{6}$$

gdzie $0 < \bar{t} < 1$. Pochodne funkcji g możemy obliczyć stosując wzór (25) rozdz. II, co daje

$$g'(t) = hf_x(a + th, b + tk) + kf_y(a + th, b + tk) \tag{7}$$

a następnie po kolejnym zróżniczkowaniu

$$
\begin{aligned}
g''(t) =& h^2 f_{xx}(a+th, b+tk) + khf_{xy}(a+th, b+tk) \\
&+ hkf_{yx}(a+th, b+tk) + k^2 f_{yy}(a+th, b+tk).
\end{aligned} \tag{8}
$$

Z uczynionych założeń o funkcji f wynika na mocy twierdzenia 5 rozdz. II, że pochodne mieszane f_{xy} oraz f_{yx} są równe w zbiorze Ω, zatem (8) można zapisać prościej

$$
g''(t) = \Big(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}\Big)(a+th, b+tk) \tag{9}
$$

(zapis po prawej stronie oznacza, że pochodne obliczamy w punkcie $(a+th, b+tk)$). Z równości (6), (7), (9) dostajemy *wzór Taylora dla funkcji dwóch zmiennych*

$$
\begin{aligned}
f(a+h, b+k) =& f(a,b) + hf_x(a,b) + kf_y(a,b) \\
&+ \frac{1}{2}\Big(h^2 f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) + 2hkf_{xy}(\bar{x},\bar{y}) + k^2 f_{yy}(\bar{x},\bar{y})\Big),
\end{aligned} \tag{10}
$$

gdzie $\bar{t}$ jest pewną liczbą z przedziału (0,1), zaś

$$
\bar{x} = a + \bar{t}h, \qquad \bar{y} = b + \bar{t}k
$$

- jak już zauważyliśmy w poprzednio, punkt $(\bar{x},\bar{y})$ leży na odcinku łączącym punkty (a,b) oraz $(a+h, b+k)$ (por. rys. 9).

W rozdz. II punkt 2 wprowadziliśmy *różniczkę funkcji f* jako funkcję liniową przyrostów h, k czyli wyrażenie

$$
d\,f(a,b;h,k) = hf_x(a,b) + kf_y(a,b), \tag{11}
$$

podobnie możemy określić *drugą różniczkę funkcji f* jako formę kwadratową przyrostów h, k postaci

$$
d^2 f(a,b;h,k) = h^2 f_{xx}(a,b) + 2hkf_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b) \tag{12}
$$

(zakładamy ciągłość a więc i równość pochodnych mieszanych).

Używając oznaczeń (11), (12) możemy wzór Taylora (10) zapisać inaczej jako

$$
f(a+h, b+k) = f(a,b) + d\,f(a,b;h,k) + \frac{1}{2} d^2 f(\bar{x},\bar{y};h,k). \tag{10'}
$$

Wprowadzimy teraz symboliczny zapis wzorów (11), (12) w postaci

$$
d\,f(a,b;h,k) = \Big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\Big) f(a,b) \tag{11'}
$$

oraz

$$
d^2 f(a,b;h,k) = \Big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2 f(a,b). \tag{12'}
$$

Umawiamy się przy tym, że

1^0 obliczając potęgę wyrażenia w nawiasie po prawej stronie (12') przyjmujemy

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}$$

oraz że

2^0 symboliczne mnożenie funkcji przez operator różniczkowania oznacza obliczanie odpowiedniej pochodnej w punkcie (a,b) - dla przykładu

$$\frac{\partial}{\partial x} f(a,b) = f_x(a,b), \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a,b) = f_{xx}(a,b).$$

Przy użyciu zapisu (11'), (12') wzór Taylora przyjmuje postać

$$(10") \qquad f(a+h,b+k) = f(a,b) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a,b) + \frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\bar{x},\bar{y}).$$

Wydaje się, że symboliczny zapis użyty we wzorach (11'), (12'), (10") ułatwia zapamiętanie ich.

Przechodząc do ogólnego przypadku funkcji $f(x,y)$ mającej w zbiorze Ω ciągłe pochodne cząstkowe do rzędu n włącznie wprowadzimy najpierw *r-tą różniczkę funkcji* f jako wyrażenie

$$(13) \qquad d^r f(a,b;h,k) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^r f(a,b) \qquad (1 \le r \le n)$$

- używamy tu omówionego poprzednio symbolicznego zapisu, podobnie jak we wzorach (11'), (12'). Obliczając kolejne pochodne funkcji g występujące we wzorze (5) otrzymujemy, podobnie jak w przypadku $n=2$,

$$g^{(r)}(t) = d^r f(a+th, b+tk; h,k).$$

Przyjmując $t_0 = 0$, $\tau = 1$ dostajemy stąd *wzór Taylora dla dowolnego n* w postaci

$$(14) \qquad \begin{aligned} f(a+h,b+k) =& f(a,b) + df(a,b;h,k) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} d^{n-1} f(a,b;h,k) \\ &+ \frac{1}{n!} d^n f(\bar{x},\bar{y};h,k), \end{aligned}$$

gdzie

$$\bar{x} = a + \bar{t}h, \qquad \bar{y} = b + \bar{t}h$$

- zatem punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ leży na odcinku łączącym punkty (a, b) i $(a+h, b+k)$ (por. rys. 9). Używając symbolicznego zapisu różniczek (13) możemy wzór Taylora zapisać w postaci (być może łatwiejszej do zapamiętania)

$$\begin{aligned} &f(a+h, b+k) = \\ (14') \quad &f(a,b) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a,b) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(a,b) \\ &+ \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n} f(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

3. Ekstrema funkcji dwóch zmiennych.

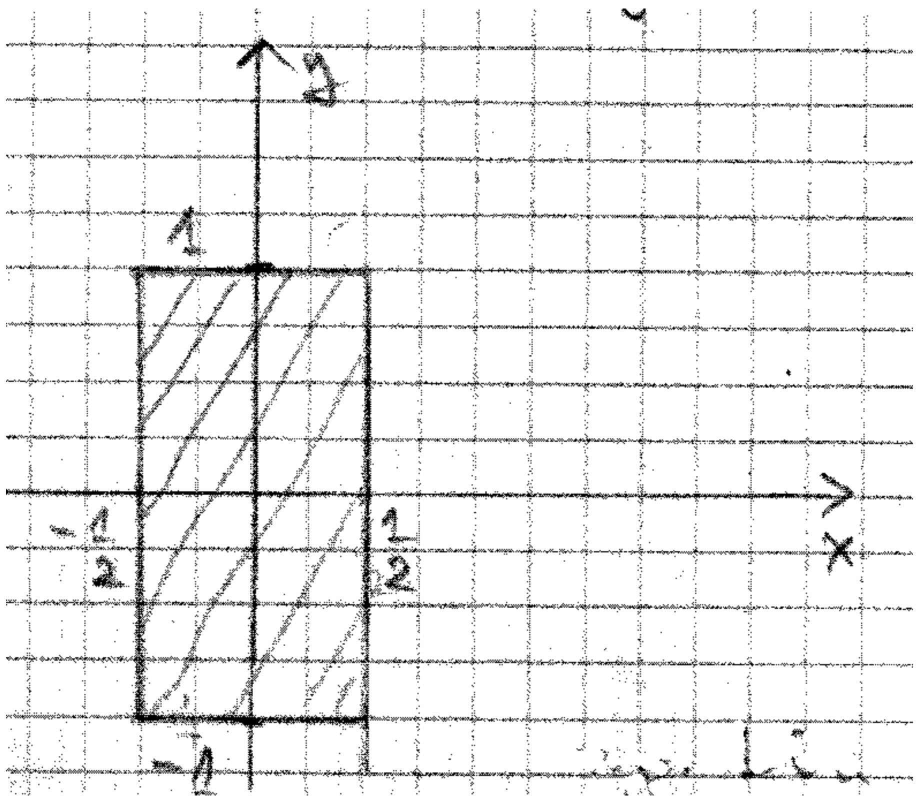
Zbiór $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy *otoczeniem punktu* (a, b), jeżeli dla pewnego $\eta > 0$ wszystkie punkty (x, y) spełniające warunek

$$(15) \qquad |x-a| < \eta, \qquad |y-b| < \eta$$

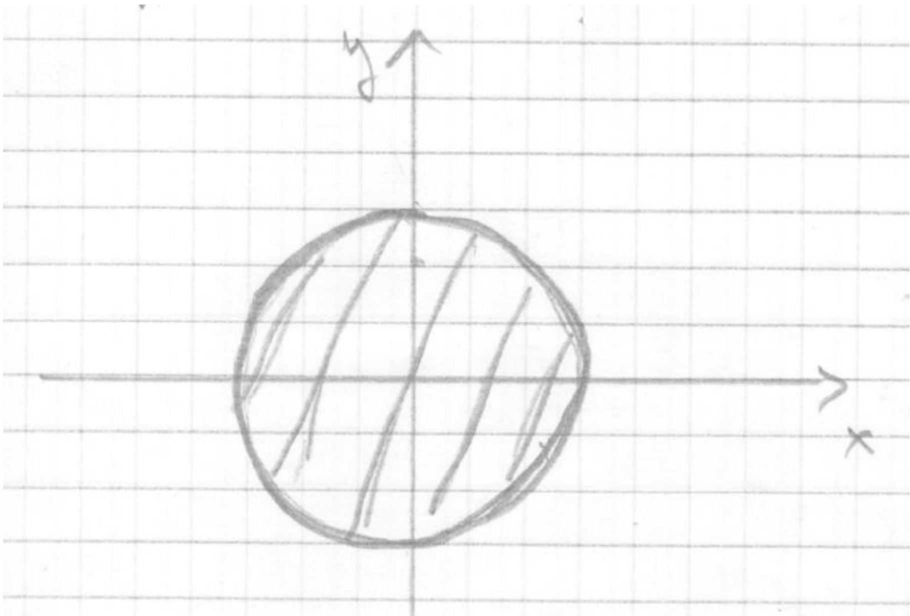
należą do Ω. Dla przykładu: każdy ze zbiorów określonych nierównościami

(a) $|x| < \frac{1}{2}, \quad |y| < 1$,

(b) $x^2 + y^2 \leq 1$ jest otoczeniem punktu $(0, 0)$ (por. rys. 10a, 10b).



[rys. 10a]



[rys. 10b]

Mówimy, że funkcja $f(x,y)$ ma w punkcie (a,b)

maksimum, jeżeli dla (x,y) należących do pewnego otoczenia punktu (a,b) zachodzi nierówność

$$f(a,b) \geq f(x,y); \tag{16}$$

minimum, jeżeli dla (x,y) należących do pewnego otoczenia punktu (a,b) zachodzi nierówność

$$f(a,b) \leq f(x,y). \tag{17}$$

Jeżeli dla $(x,y) \neq (a,b)$ należących do pewnego otoczenia punktu (a,b) zachodzi nierówność ostra

$$f(a,b) > f(x,y) \tag{16'}$$

względnie

$$f(a,b) < f(x,y), \tag{17'}$$

to mówimy, że funkcja f ma w punkcie (a,b) *maksimum właściwe* względnie *minimum właściwe.*

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (a,b) *ekstremum* (*ekstremum właściwe*), jeżeli ma w tym punkcie maksimum (maksimum właściwe) lub minimum (minimum właściwe). Punkt (a,b) nazywamy wówczas *punktem ekstremalnym.*

Podobnie, jak dla funkcji jednej zmiennej, łatwo podać warunek konieczny na to, by punkt (a,b) był punktem ekstremalnym.

Twierdzenie 2. *Jeżeli punkt (a, b) jest punktem ekstremalnym funkcji f i funkcja ma w tym punkcie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu, to*

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0. \tag{18}$$

DOWÓD. Wprowadźmy funkcje jednej zmiennej

$$g(t) = f(a + t, b), \qquad h(t) = f(a, b + t).$$

Z założeń twierdzenia wynika, że funkcje te mają ekstremum w punkcie $t_0 = 0$ oraz że mają w tym punkcie pochodną, przy czym

$$g'(0) = f_x(a, b), \qquad h'(0) = f_y(a, b). \tag{19}$$

Wobec tego na mocy twierdzenia Fermata

$$g'(0) = 0, \qquad h'(0) = 0,$$

skąd wobec (19) wynika teza twierdzenia. □

Punkt (a, b), w którym zachodzą równości (18), nazywamy *punktem stacjonarnym* funkcji f. Udowodnione twierdzenie można zatem sformułować krócej:

Twierdzenie 2'. *Każdy punkt ekstremalny funkcji mającej pierwsze pochodne cząstkowe jest jej punktem stacjonarnym.*

Następujący przykład wskazuje, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Przykład 1. Niech

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Funkcja f jest wielomianem, jest zatem określona w całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ i ma w każdym punkcie pochodne cząstkowe dowolnego rzędu. Mamy

$$f_x = 2x, \qquad f_y = -2y,$$

skąd

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0,$$

wobec tego początek układu $(0, 0)$ jest punktem stacjonarnym. Funkcja f nie ma jednak w tym punkcie ekstremum, gdyż dla dowolnych $x \neq 0$, $y \neq 0$ zachodzą nierówności

$$f(x, 0) > 0 = f(0, 0) \qquad \text{oraz} \qquad f(0, y) < 0 = f(0, 0).$$

4. Warunki dostateczne dla ekstremum funkcji dwóch zmiennych.

Jak widać z Przykładu 1, podany w twierdzeniu 2 warunek konieczny ekstremum nie jest warunkiem dostatecznym. Aby sformułować takie warunki zajmiemy się najpierw zbadaniem własności formy kwadratowej postaci

$$w(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2. \tag{20}$$

Mówimy, że forma (20) jest

dodatnio określona, gdy dla $(h,k) \neq (0,0)$ przyjmuje wartości dodatnie;

ujemnie określona, gdy dla $(h,k) \neq (0,0)$ przyjmuje wartości ujemne;

półokreślona, gdy ma stały znak, ale może znikać dla $(h,k) \neq (0,0)$;

nieokreślona, gdy dla $(h,k) \neq (0,0)$ przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak i wartości ujemne.

A oto przykłady:
(i) forma $w(h,k) = h^2 + k^2$ jest dodatnio określona,
(ii) forma $w(h,k) = h^2 - 2hk + k^2 = (h-k)^2$ jest półokreślona,
(iii) forma $w(h,k) = h^2 - k^2$ jest nieokreślona.

Zakładając, że $A \neq 0$ możemy zapisać formę $w(h,k)$ w postaci

$$w(h,k) = A\Big(h^2 + 2\frac{B}{A}hk + \frac{C}{A}k^2 + \frac{B^2}{A^2}k^2 - \frac{B^2}{A^2}k^2\Big),$$

co po prostych przekształceniach daje *postać kanoniczną* formy

$$w(h,k) = A\Big[\Big(h + \frac{B}{A}k\Big)^2 + \frac{D}{A^2}k^2\Big], \tag{21}$$

gdzie

$$D = \begin{vmatrix} A, & B \\ B, & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Wyznacznik D nazywamy *wyróżnikiem formy kwadratowej.* Decyduje on o własnościach formy kwadratowej, zachodzi bowiem

Twierdzenie 3. *Forma* (20) *jest*
(i) *określona dodatnio, gdy* $D > 0$, $A > 0$*;*
(ii) *określona ujemnie, gdy* $D > 0$, $A < 0$*;*
(iii) *półokreślona, gdy* $D = 0$*;*
(iv) *nieokreślona, gdy* $D < 0$.

DOWÓD.
(i), (ii). Jeżeli $D > 0$, to oba współczynniki A, C są różne od zera i mają ten sam znak. Wyrażenie w nawiasie kwadratowym po prawqej stronie (21) jest zatem nieujemne i znika tylko wtedy, gdy $h = k = 0$, zaś o znaku formy decyduje znak współczynnika A.

(iii) Równość $D = 0$ oznacza, że $AC = B^2$. Wynika stąd, że gdy $A = C = 0$, to wszystkie współczynniki znikają i forma jest tożsamościowo równa zeru. Zakładając, że jeden ze współczynników A, C jest różny od zera możemy nie zmniejszając ogólności założyć, że jest to współczynnik A (w przypadku $C \neq 0$ zamienilibyśmy w przeprowadzonym rachunku role zmiennych h, k). Równość (21) przyjmuje teraz postać

$$w(h,k) = A\left(h + \frac{B}{A}k\right)^2,$$

z której wynika teza w punkcie (iii).

(iv) Jeżeli $D < 0$, to przy $A = C = 0$ musi być $B \neq 0$ i wobec (20) mamy

$$w(h,k) = 2Bhk,$$

zatem forma przyjmuje zarówno wartości dodatnie jak i wartości ujemne dla $(h,k) \neq (0,0)$. Jeżeli jeden ze współczynników A, C jest różny od zera to możemy rozumować podobnie, jak w dowodzie punktu (iii) i oprzeć się na postaci kanonicznej (21), z której wynika teza punktu (iv). $\square$

Przejdźmy teraz do warunków dostatecznych ekstremum funkcji. Zakładając, że funkcja f jest klasy C^2 wprowadzimy wyznacznik

$$W(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}, & f_{xy} \\ f_{xy}, & f_{yy} \end{vmatrix}(x,y) \tag{22}$$

(zapis po prawej stronie oznacza, że pochodne obliczane są w punkcie (x,y)). Zachodzi

Twierdzenie 4. *Załóżmy, że funkcja f jest klasy C^2 w zbiorze otwartym Ω oraz że $(a,b) \in \Omega$ jest punktem stacjonarnym. Wówczas*
(α) gdy $W(a,b) > 0$ to funkcja f ma w punkcie (a,b) ekstremum właściwe, przy tym jest to

minimum, gdy $f_{xx}(a,b) > 0$, maksimum, gdy $f_{xx}(a,b) < 0$;
(β) gdy $W(a,b) < 0$ to funkcja f nie ma ekstremum w punkcie (a,b).

DOWÓD. Z założenia

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0,$$

zatem wzór Taylora (10) można zapisać w postaci

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}\Big(h^2 f_{xx}(\bar{x},\bar{y}) + 2hk f_{xy}(\bar{x},\bar{y}) + k^2 f_{yy}(\bar{x},\bar{y})\Big), \tag{23}$$

gdzie $(\bar{x},\bar{y})$ jest pewnym punktem leżącym na odcinku o końcach (a,b) i $(a+h, b+k)$ (por. rys. 9).W dowodzie wykorzystamy własności formy kwadratowej $w(h,k)$ występującej po prawej stronie (23). Mamy

$$A = \frac{1}{2} f_{xx}(\bar{x},\bar{y}), \qquad B = \frac{1}{2} f_{xy}(\bar{x},\bar{y}), \qquad C = \frac{1}{2} f_{yy}(\bar{x},\bar{y}),$$

oraz

$$D = \frac{1}{4} W(\bar{x}, \bar{y}),$$

gdzie D oznacza wyróżnik formy. Z założenia, że funkcja f jest klasy C^2 wynika, że obie funkcje $W(x, y)$ oraz f_{xx} są ciągłe, zatem dla dostatecznie małych $|h|, |k|$ wyróżnik D i współczynnik A formy kwadratowej po prawej stronie (23) mają odpowiednio ten sam znak, co wyznacznik $W(a, b)$ i pochodna $f_{xx}(a, b)$ (por. zadanie 7). Wobec tego gdy $W(a, b) > 0$, to również $D > 0$ i na mocy twierdzenia 3 (i), (ii) oraz równości (23) mamy dla $(h, k) \neq (0, 0)$

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) \begin{cases} > 0 & \text{gdy} \quad f_{xx}(a, b) > 0, \\ < 0 & \text{gdy} \quad f_{xx}(a, b) < 0, \end{cases} \tag{24}$$

a stąd wynika punkt (α) tezy. Jeżeli natomiast $W(a, b) < 0$, to również $D < 0$ i zgodnie z twierdzeniem 3 (iv) oraz równością (23) różnica

$$f(a+h, b+k) - f(a, b)$$

może dla $(h, k) \neq (0, 0)$ przybierać wartości różnych znaków, a to oznacza, że funkcja f nie ma ekstremum w punkcie (a, b), czyli punkt (β) tezy. □

Udowodnione twierdzenie nie uwzględnia przypadku, gdy $W(a, b) = 0$, gdyż wówczas nie można nic powiedzieć o znaku wyznacznika $W(\bar{x}, \bar{y})$ a więc i wyróżnika D formy występującej we wzorze (23). W tej sytuacji wzór Taylora nie jest przydatny do badania, czy funkcja ma ekstremum i musimy użyć innej metody, naogół dobranej do rozważanego przykładu.

Uwaga. Jeżeli f jest wielomianem drugiego stopnia, to jej drugie pochodne są funkcjami stałymi i wobec tego

$$W(x, y) = W(a, b), \qquad f_{xx}(x, y) = f_{xx}(a, b)$$

w dowolnym punkcie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wynika stąd, że przy założeniu (α) nierówność (24) zachodzi dla dowolnego punktu $(a + h, b + k) \in \mathbb{R}^2$ różnego od (a, b). Mówimy wówczas, że funkcja f ma w punkcie (a, b) *ekstremum* (maksimum względnie minimum) *globalne*.

Przykład 2. Zbadamy ekstrema funkcji

$$f(x, y) = 6xy - x^3 - y^3.$$

Zauważmy, że funkcja f jako wielomian jest klasy C^2 w całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ (a nawet ma ciągłe pochodne cząstkowe dowolnego rzędu), możemy zatem opierać się na twierdzeniach 2 i 4. Zaczniemy od znalezienia punktów stacjonarnych. Ponieważ

$$f_x(x, y) = 6y - 3x^2, \qquad f_y(x, y) = 6x - 3y^2,$$

punkty stacjonarne wyznaczamy rozwiązując układ równań

$$2y = x^2, \qquad 2x = y^2. \tag{25}$$

Z drugiego równania (25) mamy

$$x = \frac{1}{2}y^2, \tag{26}$$

co po wstawieniu do pierwszego równania daje

$$y(8 - y^3) = 0.$$

Ostatnie równanie ma dwa rozwiązania

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = 2$$

i stąd uwzględniając (26) dostajemy dwa punkty stacjonarne funkcji f

$$p_1 = (0,0), \qquad p_2 = (2,2).$$

Przejdziemy teraz do badania wyznacznika W w punktach stacjonarnych. Mamy

$$f_{xx}(x,y) = -6x, \qquad f_{yy}(x,y) = -6y, \qquad f_{xy} = 6$$

i stąd

$$W(x,y) = \begin{vmatrix} -6x, & 6 \\ 6, & -6y \end{vmatrix} = 36 \begin{vmatrix} -x, & 1 \\ 1, & -y \end{vmatrix} = 36(xy - 1).$$

Wobec tego

$$W(p_1) = -36 < 0, \qquad W(p_2) = 36 \cdot 3 > 0,$$

ponadto

$$f_{xx}(p_2) = -12 < 0.$$

Zgodnie z twierdzeniem 4 funkcja f ma ekstremum (właściwe) jedynie w punkcie p_2 i jest to maksimum.

Przykład 3. Zbadamy ekstrema funkcji

$$f(x,y) = x^2y(4 - x + y). \tag{27}$$

Podobnie, jak w poprzednim przykładzie, funkcja f jest wielomianem, ma więc ciągłe pochodne dowolnego rzędu w całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, spełnione są zatem założenia twierdzeń 2 i 4. Po wykonaniu mnożenia po prawej stronie (27) mamy

$$f(x,y) = 4x^2y - x^3y + x^2y^2$$

i stąd

$$f_x = 8xy - 3x^2y + 2xy^2, \qquad f_y = 4x^2 - x^3 + 2x^2y. \tag{28}$$

Dla dowolnego y mamy

$$f_x(0,y) = f_y(0,y) = 0$$

i wobec tego każdy punkt

$$p(y) = (0,y)$$

jest punktem stacjonarnym. Aby znaleźć pozostałe punkty stacjonarne rozwiążemy układ równań

$$f_x = 0, \qquad f_y = 0$$

zakładając, że $x \neq 0$. Po podzieleniu przez x względnie przez x^2 układ ten przyjmuje postać

$$8y - 3xy + 2y^2 = 0, \qquad 4 - x + 2y = 0. \tag{29}$$

Z drugiego równania (29) mamy

$$x = 2y + 4, \tag{30}$$

co po podstawieniu do pierwszego równania daje

$$y(1+y) = 0.$$

Ostatnie równanie ma dwa rozwiązania

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = -1,$$

wobec tego po uwzględnieniu (30) otrzymujemy dwa punkty stacjonarne

$$p_1 = (4,0) \qquad \text{oraz} \qquad p_2 = (2,-1).$$

Przejdziemy teraz do badania wyznacznika W w punktach stacjonarnych. Mamy

$$f_{xx} = 8y - 6xy + 2y^2, \qquad f_{yy} = 2x^2, \qquad f_{xy} = 8x - 3x^2 + 4xy$$

i stąd

$$W(p_1) = \begin{vmatrix} 0, & -16 \\ -16, & 32 \end{vmatrix} = -(16)^2 < 0$$

oraz

$$W(p_2) = \begin{vmatrix} 6, & -4 \\ -4, & 8 \end{vmatrix} = 48 - 16 > 0.$$

Zatem w punkcie p_1 niema ekstremum zaś w punkcie p_2 jest minimum (właściwe), gdyż $f_{xx}(p_2) = 6 > 0$. Pozostaje do zbadania jednoparametrowa rodzina punktów stacjonarnych $p(y) = (0,y)$. Ponieważ

$$W(p(y)) = \begin{vmatrix} 8y + 2y^2, & 0 \\ 0, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

twierdzenie 4 jest w tym przypadku bezużyteczne. Aby rozstrzygnąć, czy w punkcie $p(y)$ jest ekstremum zbadamy zachowanie się funkcji w otoczeniu tego punktu. Zauważmy, że funkcja f przyjmuje wartość zero na osiach układu współrzędnych i na prostej l o równaniu $y = x - 4$ (por. rys. 11). Ponadto

$f(x, y) > 0$, gdy

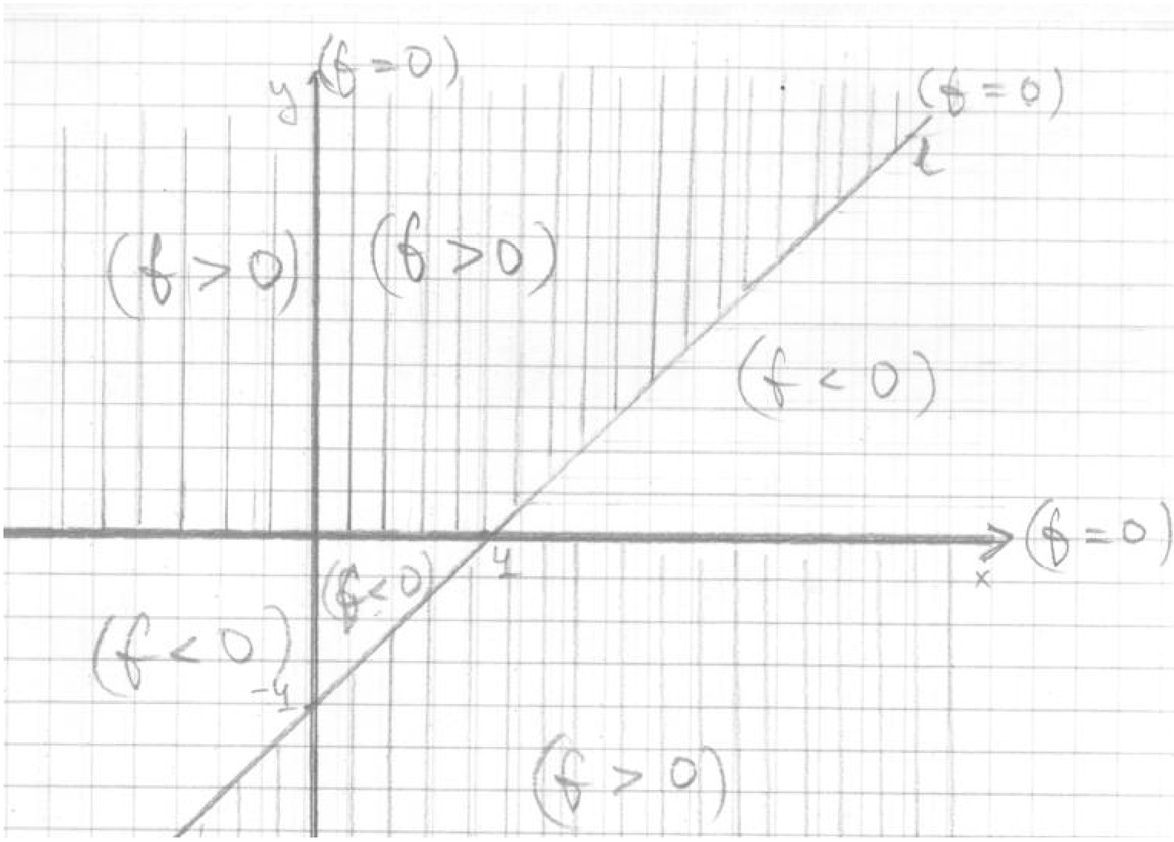
$$y > 0, \quad y > x - 4 \qquad \text{lub} \qquad y < 0, \quad y < x - 4$$

(na rys. 11 obszar zakreskowany pionowo), zaś

$f(x, y) < 0$, gdy

$$y > 0, \quad y < x - 4 \qquad \text{lub} \qquad y < 0, \quad y > x - 4$$

(na rys. 11 obszar niezakreskowany).



[rys. 11]

W punkcie $p(y)$ funkcja f ma ekstremum (niewłaściwe) tylko wtedy, gdy w pewnym otoczeniu tego punktu przyjmuje po obu stronach osi y-ów wartości tego samego znaku. Wobec tego (por. rys. 11) w punkcie $p(y)$

funkcja f ma minimum niewłaściwe dla $y > 0$ oraz dla $y < -4$,

oraz

funkcja f ma maksimum niewłaściwe dla $-4 < y < 0$.

Punkty $p(0) = (0, 0)$ i $p(-4) = (0, -4)$ są punktami stacjonarnymi, ale nie są to punkty ekstremalne. W każdym z tych punktów funkcja ma wartość zero, zaś w ich otoczeniu przyjmuje zarówno wartości dodatnie jak i ujemne.

Na podstawie rys. 11 można również stwierdzić (co wykazaliśmy poprzednio badając wyznacznik W), że w punkcie $p_1 = (4, 0)$ nie ma ekstremum. Mamy bowiem $f(p_1) = 0$, zaś w otoczeniu p_1 funkcja f przyjmuje zarówno wartości dodatnie jak i ujemne.

Przykład 4. Wróćmy do przykładu V rozdz. I punkt 1 i załóżmy, że funkcja kosztu $C(Q_1, Q_2)$ ma postać

$$C = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2.$$

Zadanie polega na znalezieniu takich wartości Q_1, Q_2 (czyli ilości każdego z dwóch wyrobów produkowanej w jednostce czasu), aby zysk Π uzyskany przez firmę był maksymalny. Mamy

$$\Pi(Q_1, Q_2) = P_1Q_1 + P_2Q_2 - 2Q_1^2 - Q_1Q_2 - 2Q_2^2$$

(ceny P_1, P_2 są ustalone). Należy znaleźć maksymalną wartość funkcji Π. Ponieważ

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_1} = P_1 - 4Q_1 - Q_2, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial Q_2} = P_2 - Q_1 - 4Q_2,$$

punkty stacjonarne znajdujemy rozwiązując układ dwóch równań liniowych

$$4Q_1 + Q_2 = P_1, \qquad Q_1 + 4Q_2 = P_2.$$

Układ ten ma jedyne rozwiązanie

$$\tilde{Q}_1 = \frac{1}{15}(4P_1 - P_2), \qquad \tilde{Q}_2 = \frac{1}{15}(4P_2 - P_1), \tag{31}$$

zatem funkcja Π, która oczywiście jest określona na całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, ma jedyny punkt stacjonarny p, którego współrzędne $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2$ są określone wzorami (31). Po obliczeniu drugich pochodnych funkcji Π stwierdzamy, że

$$W(p) = \begin{vmatrix} -4, & -1 \\ -1, & -4 \end{vmatrix} = 15 > 0,$$

natomiast

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1^2} = -4 < 0.$$

Zgodnie z twierdzeniem 4 funkcja Π ma jedyne maksimum (właściwe) dla wartości $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2$ określonych wzorami (31). Ponieważ Π jest wielomianem drugiego stopnia, jest to maksimum globalne tzn.

$$\Pi(\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2) > \Pi(Q_1, Q_2)$$

dla dowolnego $(Q_1, Q_2) \neq (\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2)$ (por. Uwaga po twierdzeniu 4).

5. Ekstrema globalne funkcji.

Definiując w rozdziale I ciągłość funkcji $f(x, y)$ w punkcie (a, b) zakładaliśmy, że jest ona określona w pewnym otoczeniu tego punktu. Obecnie rozważymy sytuację ogólniejszą.

Niech f będzie funkcją określoną na pewnym zbiorze $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$. Mówimy, że f jest *ciągła w punkcie* $(a, b) \in \mathbb{D}$, jeżeli dla każdego ciągu punktów (x_n, y_n) spełniającego warunki

$$(x_n, y_n) \in \mathbb{D} \quad \text{dla dowolnego} \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (x_n, y_n) \to (a, b) \tag{32}$$

mamy

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = f(a, b). \tag{33}$$

Przykład 5. Niech

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}_1 \cup K \cup \mathbb{D}_2,$$

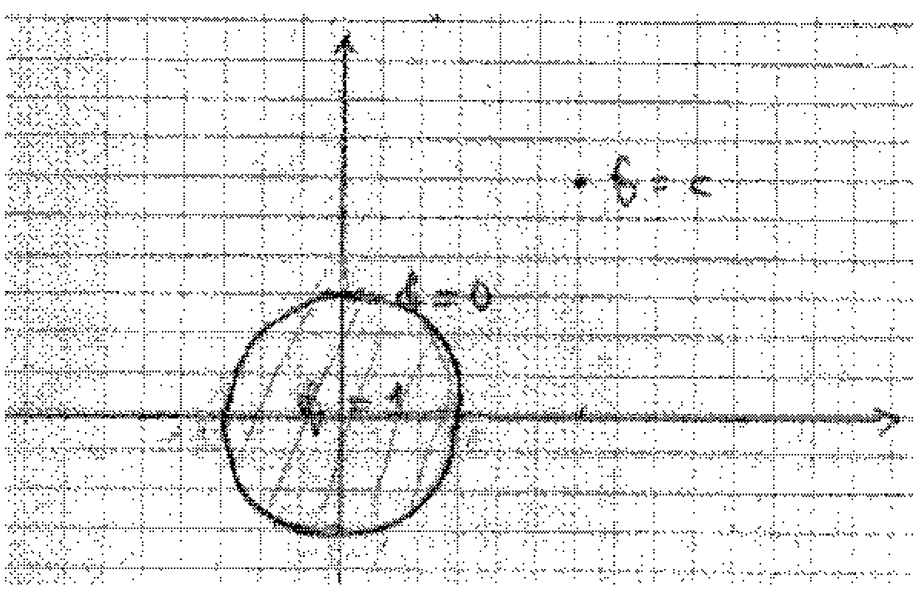
gdzie

$$\mathbb{D}_1 = \Big\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\Big\}, \qquad K = \Big\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\Big\}, \qquad \mathbb{D}_2 = \Big\{(2, 2)\Big\}.$$

Zbiór $\mathbb{D}$ jest więc sumą koła otwartego $\mathbb{D}_1$ o środku w początku układu i promieniu 1, ograniczającego go okręgu K oraz zbioru $\mathbb{D}_2$ zawierającego tylko jeden punkt (2,2). Przyjmiemy, że

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x^2 + y^2 < 1, \\ 0 & \text{dla} \quad x^2 + y^2 = 1, \end{cases} \qquad f(2, 2) = c$$

(por. rys. 12).



[rys. 12]

Łatwo okazać, że funkcja f jest ciągła w każdym punkcie koła otwartego $\mathbb{D}_1$ i nieciągła w każdym punkcie okręgu K. Jeżeli bowiem $(a,b) \in \mathbb{D}_1$ i ciąg (x_n, y_n) spełnia (32), to dla dostatecznie dużych n również $(x_n, y_n) \in \mathbb{D}_1$, zatem ciąg liczbowy $\{f(x_n, y_n)\}$ jest od pewnego miejsca ciągiem stałym o wyrazach równych 1 i warunek (33) jest spełniony. Jeżeli natomiast $(a,b) \in K$, to łatwo określić ciąg $(x_n, y_n) \in \mathbb{D}_1$ i spełniający drugi warunek (32). Ciąg liczbowy $\{f(x_n, y_n)\}$ jest wówczas ciągiem stałym o wyrazach równych 0 i równość (33) nie zachodzi. W punkcie $(a,b) = (2,2)$ funkcja f jest ciągła niezależnie od tego, jak obierzemy liczbę c, bowiem jedynym ciągiem punktów (x_n, y_n) spełniającym (32) jest ciąg stały o wyrazach (2,2) i równość (33) oczywiście zachodzi.

Mówimy, że zbiór $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ jest
ograniczony, jeżeli istnieje stała $M > 0$ taka, że

$$|(x,y)| < M \quad \text{dla} \quad (x,y) \in \mathbb{D}; \tag{34}$$

domknięty, jeżeli dla każdego ciągu punktów $(x_n, y_n) \in \mathbb{D}$ z warunku

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, y_n) = (a,b) \tag{35}$$

wynika, że $(a,b) \in \mathbb{D}$;
zwarty, jeżeli z każdego ciągu punktów $(x_n, y_n) \in \mathbb{D}$ można wybrać podciąg zbieżny do punktu $(a,b) \in \mathbb{D}$.

Przez *domknięcie* zbioru $\mathbb{D}$ (oznaczamy $\overline{\mathbb{D}}$ rozumiemy zbiór wszystkich punktów (a,b) takich, że

$$(a,b) = \lim_{n \to \infty} (x_n, y_n),$$

gdzie $(x_n, y_n) \in \mathbb{D}$.

Wprowadzone definicje zilustrujemy przykładami.

Przykład 6. Z warunku (34) wynika, że zbiór ograniczony jest zawarty w pewnym kole o środku w początku układu i dostatecznie dużym promieniu M. Zatem (rys. 13a)

(i) odcinek AB,

(ii) prostokąt ABCD,

(iii) elipsa o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

są zbiorami ograniczonymi w płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, natomiast (rys. 13b)

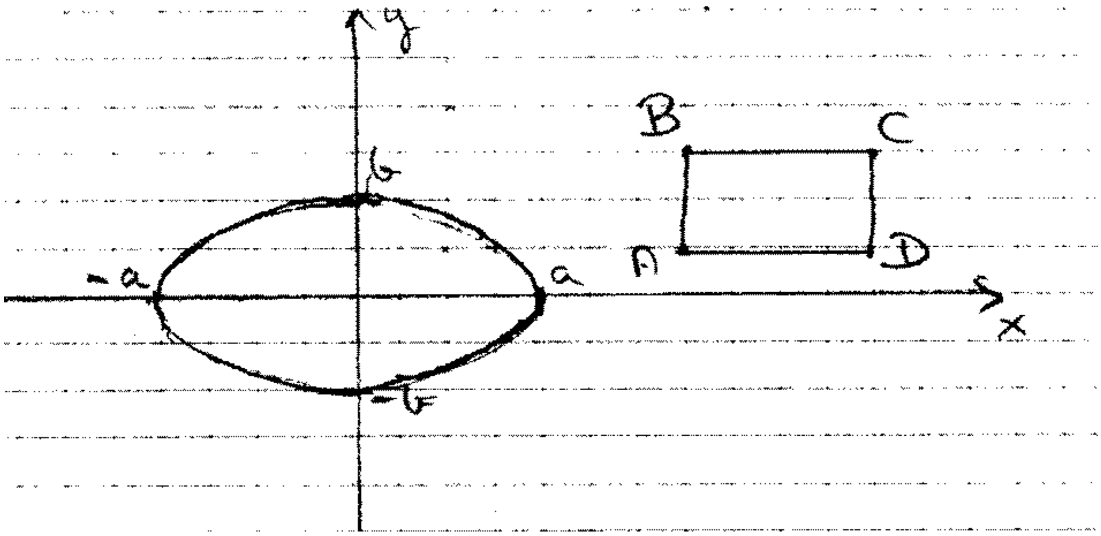
(iv) półprosta o początku w punkcie (1,1)

oraz

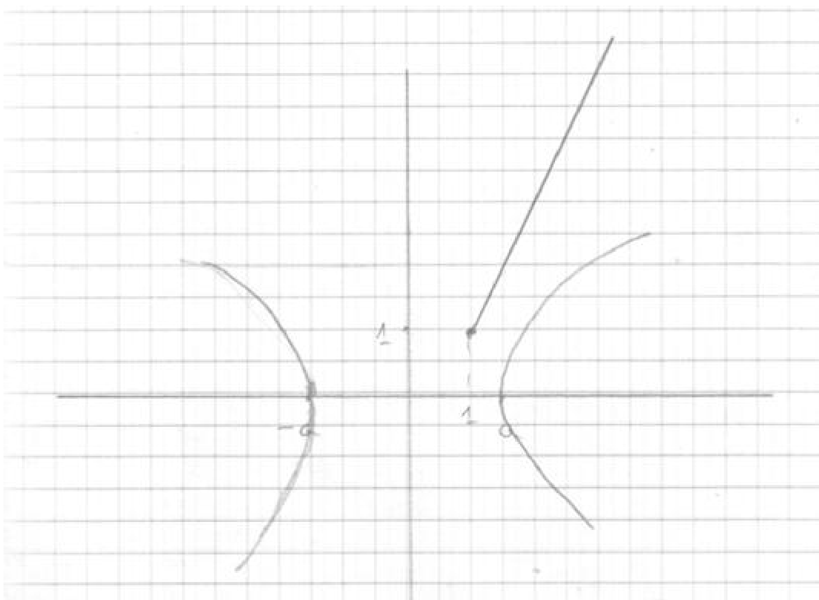
(v) hiperbola o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

nie są zbiorami ograniczonymi.



[rys. 13a]



[rys. 13b]

Przykład 7. Prostokąt $\mathbb{P}$ określony nierównościami

$$|x| \le r, \qquad |y| \le s$$

jest zbiorem domkniętym, bowiem dla każdego ciągu $(x_n, y_n) \in \mathbb{P}$ mamy

$$|x_n| \le r, \qquad |y_n| \le s.$$

W przypadku ciągu spełniającego (35) nierówności te zachowują się przy przejściu do granicy, a to oznacza, że $(a, b) \in \mathbb{P}$. Jeżeli przez $\mathbb{P}_0$ oznaczymy prostokąt otwarty określony nierównościami

$$|x| < r, \qquad |y| < s,$$

to $\overline{\mathbb{P}_0} = \mathbb{P}$.

Podobne rozumowanie można zastosować do każdego zbioru $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ określonego przez słabe nierówności, każdy taki zbiór jest więc domknięty.

Łatwo udowodnić

Twierdzenie 5. *Zbiór $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.*

DOWÓD. Załóżmy, że zbiór $\mathbb{D}$ jest domknięty i ograniczony, wówczas dla dowolnego ciągu punktów $(x_n, y_n) \in \mathbb{D}$ mamy

$$\sqrt{x_n^2 + y_n^2} < M,$$

ponadto dla dowolnego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zachodzi nierówność

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \tag{36}$$

Z pierwszej nierówności (36) wynika, że ciąg liczbowy $\{x_n\}$ jest ograniczony i wobec tego można wybrać z niego podciąg zbieżny $\{x_{n_k}\}$. Niech

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a. \tag{37}$$

Z drugiej nierówności (36) wynika, że również ciąg $\{y_{n_k}\}$ jest ograniczony, zatem można wybrać z niego podciąg zbieżny $\{y_{n_{k_r}}\}$. Uwzględniając (37) mamy zatem

$$\lim_{r\to\infty} x_{n_{k_r}} = a, \qquad \lim_{r\to\infty} y_{n_{k_r}} = b$$

a to oznacza, że

$$\lim_{r\to\infty} (x_{n_{k_r}}, y_{n_{k_r}}) = (a, b),$$

przy czym $(a, b) \in \mathbb{D}$, gdyż z założenia zbiór $\mathbb{D}$ jest domknięty. Okazaliśmy zatem, że zbiór $\mathbb{D}$ jest zwarty.

Aby udowodnić wynikanie w przeciwną stronę załóżmy, że zbiór $\mathbb{D}$ jest zwarty i niech $(x_n, y_n) \in \mathbb{D}$ będzie ciągiem zbieżnym do punktu (a, b). Wobec zwartości $\mathbb{D}$ istnieje podciąg (x_{n_k}, y_{n_k}) zbieżny do pewnego punktu należącego do $\mathbb{D}$ zaś zgodnie z twierdzeniem o podciągach musi to być punkt (a, b). Zatem $(a, b) \in \mathbb{D}$ a to oznacza, że zbiór $\mathbb{D}$ jest domknięty. Pozostaje do wykazania, że jest on ograniczony. Przypuśćmy, że tak nie jest - wówczas do dowolnego $n \in \mathbb{N}$ można dobrać punkt $(x_n, y_n) \in \mathbb{D}$ taki, że

$$|(x_n, y_n)| \geq n,$$

skąd wynika, że

$$|(x_n, y_n)| \to \infty. \tag{38}$$

Wobec zwartości $\mathbb{D}$ istnieje podciąg (x_{n_k}, y_{n_k}) zbieżny do pewnego punktu $(c,d) \in \mathbb{D}$. Wobec tego mamy

$$|(x_{n_k}, y_{n_k})| \to |(c,d)|,$$

ale to jest sprzeczne z (38). $\square$

Podobnie, jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, można dla funkcji f określonej na dowolnym zbiorze $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ wprowadzić pojęcie kresu górnego M i kresu dolnego m na zbiorze $\mathbb{D}$. Mówimy, że

$$M = \sup_{\mathbb{D}} f,$$

jeżeli spełnione są warunki

(i) $f(x,y) \leq M$ dla $(x,y) \in \mathbb{D}$,

(ii) do dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje punkt $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \mathbb{D}$ taki, że

$$f(x_\varepsilon, y_\varepsilon) > M - \varepsilon.$$

Podobnie

$$m = \inf_{\mathbb{D}} f,$$

jeżeli

(iii) $m \leq f(x,y)$ dla $(x,y) \in \mathbb{D}$,

(iv) do dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje punkt $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \mathbb{D}$ taki, że

$$f(x_\varepsilon, y_\varepsilon) < m + \varepsilon.$$

Warunki (i) - (iv) oznaczają, że liczba M jest najmniejszym ograniczeniem górnym a liczba m największym ograniczeniem dolnym zbioru wartości przyjmowanych przez funkcję na zbiorze $\mathbb{D}$.

W początkowym wykładzie analizy matematycznej dotyczącym funkcji jednej zmiennej jest dowodzone

Twierdzenie Weierstrassa. *Funkcja $f(x)$ ciągła w przedziale domkniętym jest w tym przedziale ograniczona i osiąga w nim swoje kresy, górny i dolny.*

Twierdzenie to przenosi się łatwo na funkcje dwóch zmiennych, jeżeli przedział domknięty zastąpimy przez zbiór zwarty. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie 6 (Weierstrassa). *Funkcja $f(x,y)$ ciągła w zbiorze zwartym $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ jest w tym zbiorze ograniczona i osiąga w nim swoje kresy, górny i dolny.*

DOWÓD. Dowód twierdzenia Weierstrassa dla funkcji jednej zmiennej oparty jest na następującej własności przedziału domkniętego $[a,b]$: z każdego ciągu liczbowego $\{x_n\}$ wyjętego z $[a,b]$ można wybrać podciąg zbieżny do granicy należącej do tego przedziału. Oznacza to, że przedział domknięty $[a,b]$ jest zbiorem zwartym, (jeżeli zmodyfikujemy podaną poprzednio definicję na przypadek zbiorów położonych na osi liczbowej). Dla funkcji dwóch zmiennych dowód przebiega podobnie, szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi. $\square$

Z twierdzenia 6 wynika, że w przypadku funkcji f ciągłej na zbiorze zwartym $\mathbb{D}$ liczba

$$M = \sup_D f$$

jest jej największą wartością, zaś liczba

$$m = \inf_D f$$

najmniejszą wartościa na zbiorze $\mathbb{D}$. Liczbę M nazywamy *maksimum globalnym funkcji f na zbiorze* $\mathbb{D}$, zaś liczbę m - *minimum globalnym funkcji f na zbiorze* $\mathbb{D}$. Dla maksimum względnie minimum globalnego używamy wspólnej nazwy *ekstremum globalnego.*

Uwaga. Ekstremum globalne funkcji należy odróżnić od wprowadzonego w punkcie 3 ekstremum funkcji w punkcie (a, b), które z definicji oznaczało największą względnie najmniejszą wartość funkcji *w pewnym otoczeniu punktu* (a, b). Ekstremum takie nazywamy *ekstremum lokalnym* funkcji.

Punkt $(a, b) \in \mathbb{D}$ nazywamy *punktem wewnętrznym zbioru* $\mathbb{D}$, jeżeli posiada on otoczenie zawarte w $\mathbb{D}$. Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru $\mathbb{D}$ nazywamy *wnętrzem zbioru* $\mathbb{D}$. *Brzegiem* zbioru $\mathbb{D}$ nazywamy zbiór $\overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{D}_0$, gdzie $\mathbb{D}_0$ oznacza wnętrze zbioru $\mathbb{D}$. Można okazać, że punkt (a, b) należy do brzegu zbioru $\mathbb{D}$ wtedy i tylko wtedy gdy każde jego otoczenie zawiera punkt należący do $\mathbb{D}$ oraz punkt nie należący do tego zbioru. Proponujemy Czytelnikowi sprawdzenie, że brzeg prostokąta $\mathbb{P}$ rozważanego w Przykładzie 7 składa się z czterech odcinków będących jego bokami.

Łatwo udowodnić

Twierdzenie 7. *Jeżeli funkcja f ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu we wnętrzu $\mathbb{D}$ i osiąga swój kres górny lub dolny w punkcie wewnętrznym (a, b) zbioru $\mathbb{D}$, to (a, b) jest jej punktem stacjonarnym.*

DOWÓD. Z założenia wynika, że w punkcie (a, b) funkcja f ma ekstremum lokalne, zatem na mocy twierdzenia 2

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0.$$

□

Przykład 8. Znaleźć największą wartość M i najmniejszą wartość m funkcji

$$f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2$$

w kole $\mathbb{D}$ domkniętym (tj. wraz z ograniczającym je okręgiem) o środku w początku układu i promieniu 1. Koło $\mathbb{D}$ jest zbiorem zwartym (por. zadanie 2), zatem zgodnie z twierdzeniem 6 funkcja f osiąga w nim swoje kresy, górny i dolny. Jeżeli któryś z kresów jest przyjmowany w punkcie wewnętrznym koła $\mathbb{D}$, to zgodnie z twierdzeniem 7 jest to punkt stacjonarny. Dlatego rozwiązanie zadania zaczniemy od znalezienia punktów stacjonarnych funkcji f. Mamy

$$f_x(x, y) = 4x - y, \qquad f_y(x, y) = 2y - x,$$

Zatem współrzędne punktu stacjonarnego znajdujemy rozwiązując układ równań liniowych

$$4x - y = 0, \qquad -x + 2y = 0.$$

Jest to układ jednorodny o wyznaczniku różnym od zera, ma więc jedyne rozwiązanie $x = y = 0$. Wobec tego punkt (0,0) jest jedynym punktem stacjonarnym funkcji f. W badaniu, czy jest to punkt ekstremalny oprzemy się na twierdzeniu 4. Mamy

$$W(0,0) = \begin{vmatrix} 4, & -1 \\ -1, & 2 \end{vmatrix} = 7$$

oraz

$$f_{xx}(0,0) = 4 > 0,$$

zatem w punkcie (0,0) funkcja ma minimum, przy tym jest to minimum globalne, gdyż f jest wielomianem drugiego stopnia (por. Uwaga po twierdzeniu 4). Mamy więc

$$m = f(0,0) = 0.$$

Ponieważ funkcja f nie ma innych punktów stacjonarnych, zgodnie z twierdzeniem 7 nie może przyjmować swego kresu górnego we wnętrzu koła $\mathbb{D}$. Wobec tego liczba

$$M = \sup_{\mathbb{D}} f$$

jest jedną z wartości funkcji f na okręgu K o środku w początku układu i promieniu 1. Wprowadając współrzędne biegunowe (por. rozdz. II Przykład 10) możemy okręg K opisać równaniami

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

i przedstawić funkcję f na okręgu K w postaci

$$g(t) = f(\cos t, \sin t)$$

czyli

$$g(t) = 2\cos^2 t - \cos t \sin t + \sin^2 t. \tag{39}$$

Przekształcając prawą stronę (39) mamy

$$g(t) = \Big(\frac{3}{2}\cos^2 t + \frac{1}{2}\cos^2 t\Big) - \frac{1}{2}\sin 2t + \Big(\frac{3}{2}\sin^2 t - \frac{1}{2}\sin^2 t\Big)$$

czyli

$$g(t) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2t - \sin 2t). \tag{40}$$

Ponieważ

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{4},$$

z (40) wynika, że

$$g(t) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\Big(\frac{\pi}{4} + 2t\Big).$$

Z ostatniego przedstawienia funkcji g widać, że jej największa wartość dla $t \in [0, 2\pi]$ wynosi

$$M = \frac{3+\sqrt{2}}{2}.$$

Jest to jednocześnie największa wartość (czyli maksimum globalne) funkcji f na kole domkniętym $\mathbb{D}$.

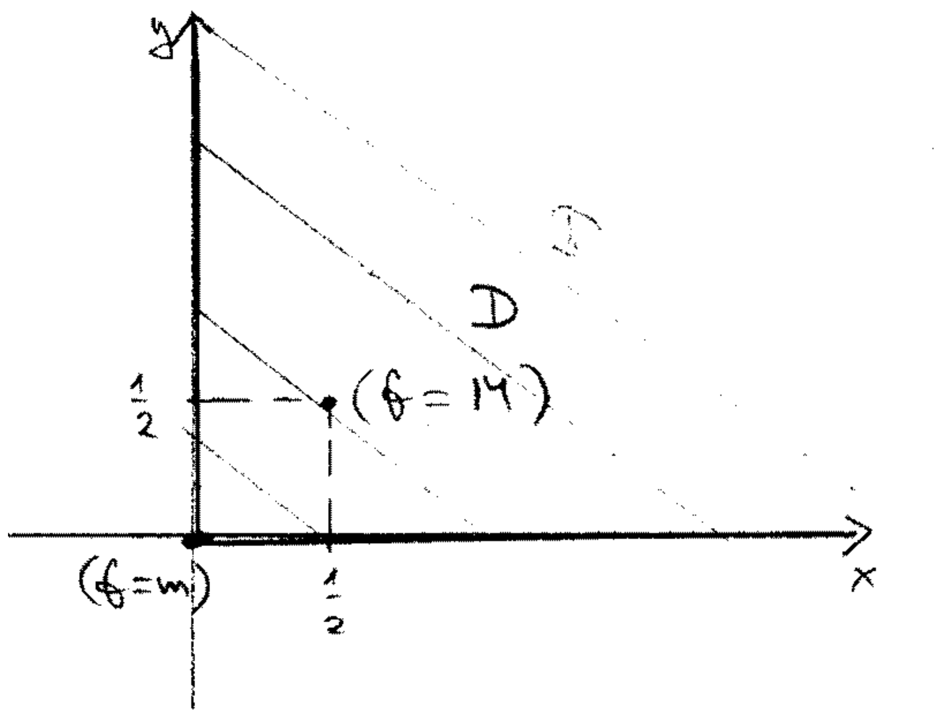
Przykład 9. Znajdziemy minimum globalne m i maksimum globalne M funkcji

$$f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$$

na zbiorze

$$\mathbb{D} = \Big\{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\Big\}$$

(rys. 14).



[rys. 14]

Zauważmy, że funcja f przyjmuje w zbiorze $\mathbb{D}$ wartości nieujemne i znika w początku układu. Wobec tego liczba

$$m = 0 = f(0,0)$$

jest najmniejszą wartością funkcji czyli minimum globalnym w zbiorze $\mathbb{D}$. Ponieważ zbiór $\mathbb{D}$ nie jest zwarty (por. twierdzenie 5), nie możemy zastosować twierdzenia Weierstrassa, nie wiemy zatem, czy funkcja f przyjmuje w nim swój kres górny M. Łatwo jednak zauważyć, że

1^0 $M > 0$, gdyż funkcja przyjmuje wartości dodatnie poza początkiem układu oraz

2^0 istnieje liczba $r_0 > 0$ taka, że dla

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} > r_0$$

zachodzi nierówność

$$0 \leq f(x,y) < \frac{M}{2}.$$

Aby udowodnić 2^0 wystarczy oprzeć się na nierówności

$$0 \leq f(x,y) \leq 2re^{-r^2}$$

i sprawdzić (np. stosujęc regułę de l'Hospitala), że

$$\lim_{r\to\infty} 2re^{-r^2} = 0.$$

Wobec tego liczba M jest również kresem górnym funkcji f na mniejszym zbiorze

$$\mathbb{D}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{D} : \sqrt{x^2 + y^2} \leq r_0\right\}$$

i zgodnie z twierdzeniem Weierstrassa jest jedną z wartości funkcji na tym zbiorze (proponujemy, by Czytelnik sprawdził, że (a) funkcja f jest ciągła w całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ oraz (b) opierając się na twierdzeniu 5, że zbiór $\mathbb{D}_1$ jest zwarty). Jeżeli wartość M jest przyjmowana w punkcie p_0 należącym do wnętrza zbioru $\mathbb{D}$, to zgodnie z twierdzeniem 7 jest to punkt stacjonarny funkcji f. Różniczkując otrzymujemy

$$f_x(x,y) = (1 - 2x^2 - 2xy)e^{-x^2-y^2}, \qquad f_y(x,y) = (1 - 2y^2 - 2xy)e^{-x^2-y^2},$$

wobec tego współrzędne punktu p_0 znajdujemy z układu równań

$$1 - 2x^2 - 2xy = 0, \qquad 1 - 2y^2 - 2xy = 0.$$

Odejmując równania stronami dostajemy $x^2 = y^2$ czyli $x = y$, co po wstawieniu do pierwszego z równań daje rozwiązanie $x = y = \frac{1}{2}$. Zatem punkt

$$p_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

jest jedynym punktem stacjonarnym i przy tym

$$f(p_0) = e^{-\frac{1}{2}}. \tag{41}$$

Pozostaje zbadanie funkcji na półosiach układu współrzędnych ograniczających zbiór $\mathbb{D}$. Ponieważ

$$f(x,0) = xe^{-x^2}, \qquad f(0,y) = ye^{-y^2},$$

wystarczy zbadać przebieg funkcji

$$g(t) = te^{-t^2} \qquad (t \geq 0).$$

Mamy

$$g'(t) = (1-2t^2)e^{-t^2}$$

i stąd

$$g'(t)\begin{cases} >0 & \text{dla} \quad 0 \leq t < \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ =0 & \text{dla} \quad t = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ <0 & \text{dla} \quad t > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

i wobec tego funkcja $g(t)$ osiąga swoją największą wartość dla $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, przy czym zgodnie z (41)

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}} < f(p_0) = e^{-\frac{1}{2}}. \tag{42}$$

Z (42) widać, że funkcja f przyjmuje swoje maksimum globalne M w punkcie p_0 i przy tym

$$M = e^{-\frac{1}{2}} = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

(por. rys. 14).

Zadania.

1. Udowodnić, że zbiór

$$K_1 = \Big\{(x,y) : (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\Big\}$$

jest otwarty, zaś zbiór

$$K_2 = \Big\{(x,y) : (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2\Big\}$$

jest domknięty. Narysować oba zbiory.

Uwaga. Zbiór K_1 nazywamy *kołem otwartym* zaś zbiór K_2 - *kołem domkniętym* o środku (a, b) i promieniu r.

2. Udowodnić, że koło domknięte (por. zadanie 1) jest zbiorem zwartym.

3. Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ narysować zbiór punktów (x, y) określony nierównością

$$\text{(i)} \quad x^2 + y^2 \leq 2, \qquad \text{(ii)} \quad xy \geq 0,$$
$$\text{(iii)} \quad x^2 + y^2 < 4, \qquad \text{(iv)} \quad x > 0.$$

Który z tych zbiorów jest otoczeniem punktu (1,1)?

4. Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ narysować zbiory punktów (x, y) określone następująco:

$$\text{(i)} \quad |x + y| \leq 1, \qquad \text{(ii)} \quad |x + y| < 1 \quad \text{oraz} \quad |x - y| < 1, \qquad \text{(iii)} \quad x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

Który z tych zbiorów jest otoczeniem początku układu?

5. Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ narysować zbiory punktów (x, y) określone następująco:

$$\text{(i)} \quad x \geq 0,\ -x \leq y \leq x, \qquad \text{(ii)} \quad y < 0,\ y < x < -y,$$
$$\text{(iii)} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 < 4, \qquad \text{(iv)} \quad x^2 + (y-1)^2 = 4,$$
$$\text{(v)} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 \geq 4.$$

Który z tych zbiorów jest a.) domknięty, b.) otwarty, c.) ograniczony, d.) nieograniczony, e.) zwarty?

6. Udowodnić, że zbiór $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest otoczeniem każdego należącego do niego punktu.

7. Zakładamy, że funkcja f jest ciągła w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ oraz że dla pewnego punktu $(a, b) \in \Omega$ zachodzi nierówność

$$f(a, b) > 0.$$

Udowodnić, że f przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie w pewnym otoczeniu punktu (a, b).

8. Zakładamy, że funkcja $f(x, y)$ jest klasy C^1 w kole otwartym K (por. Uwaga po zadaniu 1) oraz że

$$f_x(x, y) = 0 = f_y(x, y)$$

dla $(x, y) \in K$. Okazać, że f jest funkcją stałą w K. Porównać ze znanym twierdzeniem dla funkcji jednej zmiennej.

9. Napisać wzór Taylora przy $n = 2$, jeżeli

$$\text{(i)} \quad f(x,y) = \cos(x+y), \qquad (a,b) = (0,\pi);$$
$$\text{(ii)} \quad f(x,y) = e^{x-y}, \qquad (a,b) = (0,0).$$

10. Zbadać ekstrema funkcji

$$\text{(i)} \quad f(x,y) = 8x^5 + 40x^3y + 8y^3 + 99y^2 + 1,$$
$$\text{(ii)} \quad f(x,y) = e^{-(x^2+xy+y^2)},$$
$$\text{(iii)} \quad f(x,y) = e^{-2x^2+xy+y^2},$$
$$\text{(iv)} \quad f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y), \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}.$$

11. Zbadać ekstrema funkcji

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4a^2xy + 2a^2$$

w zależności od parametru a.

12. Okazać, że funkcja liniowa jednej lub dwóch zmiennych nie będąca stałą nie ma punktów stacjonarnych. Wywnioskować stąd, że na dowolnym wielokącie funkcja liniowa dwóch zmiennych osiąga swoją największą i najmniejszą wartość w wierzchołkach tego wielokąta.
Wskazówka. Oprzeć się na twierdzeniu Weierstrassa i na twierdzeniu 7.

13. Niech $f(x,y)$ będzie wielomianem drugiego stopnia. Zakładając, że (a,b) jest punktem stacjonarnym funkcji f oraz że $W(a,b) = 0$ udowodnić, że w punkcie (a,b) funkcja f ma ekstremum globalne (tzn. że jedna z nierówności (16), (17) zachodzi dla wszystkich $(x,y) \in \mathbb{R}^2$).

14. Zbadać ekstrema funkcji

$$\text{a.)} \quad f(x,y) = x^4 + y^2, \qquad \text{b.)} \quad f(x,y) = x^3 + y^2.$$

Wskazówka. W punkcie b.) zbadać, dla jakich $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ zachodzi równość

$$f(x,y) = 0 \tag{41}$$

oraz nierówności

$$f(x,y) > 0, \qquad f(x,y) < 0. \tag{42}$$

Narysować zbiory punktów określone równością (41) oraz każdą z nierówności (42).

15. Zbadać ekstrema funkcji

$$f(x,y) = x^2 + \lambda y^2$$

w zależności od parametru λ. Jak wygląda wykres funkcji f?

16. Znaleźć największą wartość iloczynu xyz trzech liczb dodatnich o stałej sumie

$$x + y + z = c.$$

Wskazówka. Zauważyć, że zadanie sprowadza się do znalezienia maksimum globalnego funkcji

$$f(x,y) = xy(c - x - y)$$

na zbiorze

$$\Big\{(x,y) : x > 0,\ y > 0,\ x + y < c\Big\},$$

następnie oprzeć się na twierdzeniach 6, 7.

17. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji

$$f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2$$

w prostokącie $\mathbb{P}$ określonym nierównościami $|x| \leq 1,\ 1 \leq y \leq 2$.
Wskazówka. Znaleźć punkty stacjonarne funkcji f, następnie oprzeć się na twierdzeniach 6, 7.

18. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji

$$f(x,y) = 2x^2 - x + y^2 - y$$

na zbiorze określonym nierównościami

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0, \qquad x + y \leq 1.$$

Wskazówka - jak w zdaniu 17.

19. Znaleźć kresy górny i dolny funkcji

$$\text{a.)}\quad f(x,y) = xe^{-xy} \quad \text{dla} \quad x \geq 0,\ y \geq 1,$$

$$\text{b.)}\quad f(x,y) = e^{-x^2-y^2} \quad \text{na płaszczyźnie} \quad \mathbb{R}^2.$$