

Twierdzenie o funkcji uwikłanej i jego konsekwencje

1. Twierdzenie o funkcji uwikłanej jednej zmiennej.

Niech $F(x, y)$ będzie funkcją określoną w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Zajmiemy się ustaleniem warunków, przy których równanie

$$(1) \quad F(x, y) = 0$$

ma rozwiązanie względem y przy ustalonym x z pewnego przedziału \mathbb{I} . Na przykładzie

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

widać, że równanie (1) może nie mieć rozwiązania. Jeżeli rozwiązanie takie istnieje, to oczywiście jest funkcją

$$y = g(x) \quad (x \in \mathbb{I}),$$

może jednak nie być jedyne. Na przykład równanie

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

ma dwa rozwiązania różniące się znakiem

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{oraz} \quad -\sqrt{1 - x^2},$$

oba określone w przedziale $[-1, 1]$. Dokładniejszą odpowiedź na nasze pytanie daje

Twierdzenie 1. *Zakładamy, że $F(x, y)$ jest funkcją klasy C^1 w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ oraz że*

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0$$

dla pewnego $(x_0, y_0) \in \Omega$. Wówczas

(i) *istnieje dokładnie jedna funkcja*

$$y = g(x)$$

określona w pewnym otoczeniu ω punktu x_0 i spełniająca warunki

$$(2) \quad F(x, g(x)) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in \omega, \quad g(x_0) = y_0,$$

(ii) funkcja g jest klasy $C^1(\omega)$ i przy tym

$$(3) \quad g'(x) = -\frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}$$

dla $x \in \omega$.

DOWÓD. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że $F_y(x_0, y_0) > 0$. Z ciągłości funkcji F_y wynika, że nierówność

$$(4) \quad F_y(x, y) > 0$$

zachodzi dla

$$x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha), \quad y \in (y_0 - \beta, y_0 + \beta),$$

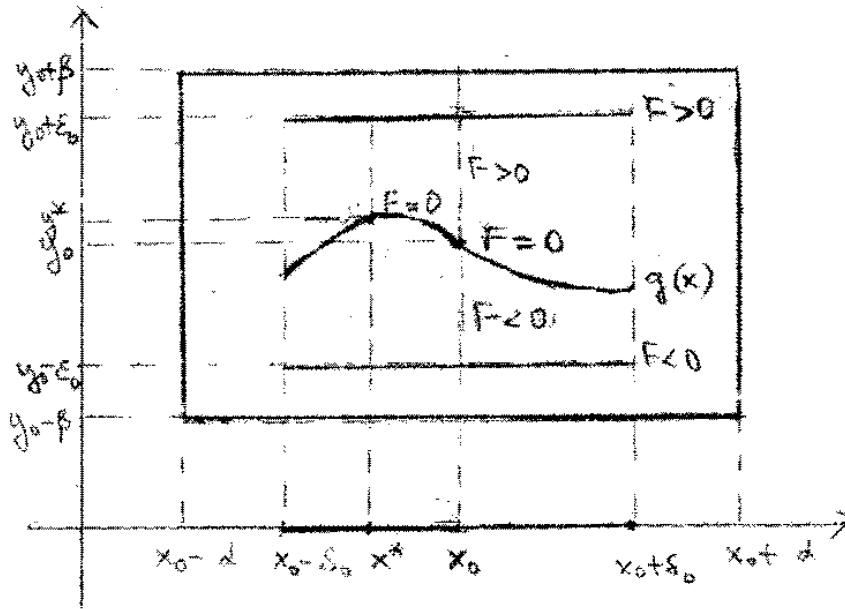
gdzie α, β są odpowiednio dobranymi liczbami dodatnimi i wobec tego funkcja jednej zmiennej $F(x_0, y)$ jest ściśle rosnąca w przedziale $(y_0 - \beta, y_0 + \beta)$. Ponieważ $F(x_0, y_0) = 0$, dla ustalonego $\varepsilon_0 \in (0, \beta)$ mamy

$$(5) \quad F(x_0, y_0 + \varepsilon_0) > 0, \quad F(x_0, y_0 - \varepsilon_0) < 0.$$

Wobec ciągłości funkcji F istnieje liczba $\delta_0 > 0$ taka, że nierówności (5) pozostają prawdziwe po zastąpieniu x_0 przez $x \in \mathbb{P} = (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$, zatem

$$F(x, y_0 + \varepsilon_0) > 0, \quad F(x, y_0 - \varepsilon_0) < 0$$

dla $x \in \mathbb{P}$ (por. rys. 15)



[rys. 15]

Przy dowolnie ustalonym $x^* \in \mathbb{P}$ funkcja $F(x^*, y)$ jest ciągła w przedziale $[y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0]$ i przyjmuje wartości różnych znaków na jego końcach, istnieje zatem liczba $y^* \in (y_0 - \varepsilon_0, y_0 + \varepsilon_0)$ taka, że

$$F(x^*, y^*) = 0,$$

przy czym liczba ta jest jedyna, gdyż wobec (4) funkcja $F(x^*, y)$ jest ściśle rosnąca. Przyjmując

$$y^* = g(x^*)$$

otrzymujemy dla $x \in \mathbb{P}$ jednoznaczne rozwiązanie równania (1) spełniające warunki (2).

Podobne rozumowanie możemy przeprowadzić zastępując ε_0 przez dowolne $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Stwierdzamy w ten sposób istnienie liczby $\delta > 0$ takiej, że

$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$$

dla $|x - x_0| < \delta, x \in \mathbb{P}$ - a to oznacza ciągłość funkcji $g(x)$ dla $x = x_0$. Aby udowodnić jej ciągłość w całym przedziale \mathbb{P} wystarczy powtórzyć przeprowadzone rozumowanie zastępując punkt (x_0, y_0) przez punkt $(x_1, g(x_1))$, gdzie $x_1 \in \mathbb{P}$. Stwierdzamy wówczas, że w pewnym otoczeniu x_1 istnieje rozwiązanie $y = g_1(x)$ równania (1) ciągłe dla $x = x_1$, przy czym wobec jednoznaczności musi zachodzić równość

$$g_1(x) = g(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{P}.$$

Przyjmując $\omega = \mathbb{P}$ otrzymujemy punkt (i) tezy.

Aby udowodnić (ii) ustalmy $x \in \mathbb{P}$ i przyrost h tak, by $x + h \in \mathbb{P}$. Mamy

$$F(x + h, g(x + h)) - F(x, g(x)) = 0,$$

co po zastosowaniu twierdzenia o wartości średniej (rozd. III, Twierdzenie 1) daje

$$(6) \quad hF_x(\bar{x}, \bar{y}) + kF_y(\bar{x}, \bar{y}) = 0,$$

gdzie

$$k = g(x + h) - g(x).$$

Punkt (\bar{x}, \bar{y}) leży na odcinku łączącym punkty $(x, g(x))$ oraz $(x + h, g(x + h))$, zatem $F_y(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ i przekształcając (6) dostajemy

$$(7) \quad \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = -\frac{F_x(\bar{x}, \bar{y})}{F_y(\bar{x}, \bar{y})}.$$

Z ciągłości pochodnych F_x, F_y oraz udowodnionej poprzednio ciągłości funkcji $g(x)$ wynika, że prawa strona (7) ma granicę przy $h \rightarrow 0$, wobec tego funkcja g ma pochodną w punkcie x . Przechodząc w (7) do granicy przy $h \rightarrow 0$ dostajemy (3) dla $x \in \omega = \mathbb{P}$. \square

Uwaga. Dowodząc różniczkowalności funkcji g otrzymaliśmy równocześnie formułę (3). Formułę tą można również otrzymać bezpośrednio stosując *metodę różniczkowania*

tożsamości, jeżeli wiemy już, że funkcja g ma pierwszą pochodną. Wówczas różniczkując funkcję stałą (2) otrzymujemy

$$\frac{d}{dx}F(x, g(x)) = 0 \quad \text{dla } x \in \omega$$

czyli w oparciu o twierdzenie o różniczkowaniu superpozycji (twierdzenie 6 rozdz.II)

$$F_x(x, g(x)) + g'(x)F_y(x, g(x)) = 0 \quad \text{dla } x \in \omega,$$

co daje (3).

Przykład 1. Jeżeli

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

to równanie (1) można zapisać w równoważnej postaci

$$(8) \quad x^2 + y^2 = 1,$$

z której widać, że określa ono okrąg o środku w początku układu i promieniu 1. Funkcja F jest klasy C^1 w całej płaszczyźnie \mathbb{R}^2 i przy tym

$$(9) \quad F_y(x, y) = 2y,$$

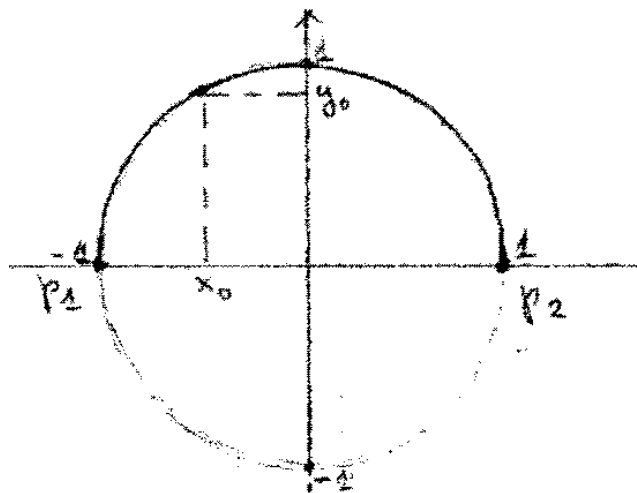
zatem założenia twierdzenia 1 są spełnione, jeżeli (x_0, y_0) jest dowolnie obranym punktem okręgu takim, że $y_0 \neq 0$. Z twierdzenia 1 wynika, że równanie (8) ma dokładnie jedno rozwiązanie $y = g(x)$ określone w otoczeniu punktu x_0 i spełniające warunki (2). W naszym przykładzie rozwiązanie to łatwo wyznaczyć efektywnie. Mamy

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{gdy } y_0 > 0$$

oraz

$$g(x) = -\sqrt{1 - x^2} \quad \text{gdy } y_0 < 0,$$

w obu przypadkach funkcja g jest określona w przedziale $\omega = [-1, 1]$ będącym otoczeniem punktu $x_0 \in (-1, 1)$ (por. rys. 16).



[rys. 16]

Jeżeli $y_0 = 0$, to odpowiedni punkt (x_0, y_0) ma postać $p_1 = (-1, 0)$ lub $p_2 = (1, 0)$; zgodnie z (9) w obu przypadkach mamy $F_y(x_0, y_0) = 0$, zatem założenia twierdzenia 1 nie są spełnione. Z rys. 16 widać, że w rozważanej sytuacji teza twierdzenia 1 nie jest prawdziwa, bowiem przez każdy z punktów p_1, p_2 przechodzą wykresy dwóch rozwiązań równania (8) (górny i dolny półokrąg), przy czym żadne z tych rozwiązań nie jest określone w otoczeniu punktu $x_0 = -1$ względnie $x_0 = 1$.

Przykład 2. Niech

$$F(x, y) = ax + by + c,$$

wówczas (1) jest równaniem liniowym

$$(10) \quad ax + by + c = 0.$$

Jeżeli założymy, że $b \neq 0$ (co oznacza geometrycznie, że prosta l określona równaniem (10) nie jest równoległa do osi y -ów), to założenia twierdzenia 1 są spełnione przy dowolnym wyborze punktu $(x_0, y_0) \in l$. Rozwiązanie ma postać

$$y = -\frac{1}{b}(ax + c)$$

i jest określone w całym przedziale $(-\infty, \infty)$.

Wzór (3) można wykorzystać do badania ekstremów funkcji $g(x)$ będącej rozwiązaniem równania (1). Załóżmy, że spełnione są założenia twierdzenia 1 i że w punkcie x_0 funkcja g ma ekstremum, wówczas $g'(x_0) = 0$ (mówimy, że x_0 jest *punktem stacjonarnym* funkcji g), a to oznacza wobec (3), że

$$(11) \quad F_x(x_0, y_0) = 0 \quad (y_0 = g(x_0)).$$

Jeżeli F jest klasy C^2 , to zgodnie z twierdzeniem o różniczkowaniu superpozycji (twierdzenie 6 rozdz. II) prawa strona (3) jest funkcją klasy C^1 w otoczeniu ω punktu x_0 . Różniczkując obustronnie równość (3) dostajemy

$$(12) \quad g''(x) = \left[\frac{F_x \frac{d}{dx} F_y - F_y \frac{d}{dx} F_x}{(F_y)^2} \right]_{(x, g(x))} \quad (x \in \omega).$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F_x &= F_{xx} + F_{xy} y' = F_{xx} - \frac{F_x}{F_y} F_{xy}, \\ \frac{d}{dx} F_y &= F_{yx} + F_{yy} y' = F_{yx} - \frac{F_x}{F_y} F_{yy}, \end{aligned}$$

podstawiając do (12) otrzymujemy

$$(12) \quad g''(x) = \left[\frac{2F_x F_y F_{xy} - F_{xx} (F_y)^2 - F_{yy} (F_x)^2}{(F_y)^3} \right]_{(x, g(x))} \quad (x \in \omega)$$

(wykorzystaliśmy równość pochodnych mieszanych funkcji F , por. twierdzenie 5 rozdz. II). Jeżeli x_0 jest punktem stacjonarnym funkcji g , to wobec (11) równość (13) przybiera prostszą postać

$$(14) \quad g''(x_0) = -\frac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} \quad (y_0 = g(x_0)).$$

Przykład 3. Wykorzystamy przeprowadzony rachunek do zbadania ekstremów funkcji $y = g(x)$ będącej rozwiązaniem równania

$$(15) \quad \log \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

Równanie to nie daje się rozwiązać efektywnie, możemy jednak zbadać, opierając się na twierdzeniu 1, czy posiada ono rozwiązanie. Równanie (15) jest równoważne równaniu (1), w którym

$$F(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

Funkcja F jest klasy C^1 w płaszczyźnie \mathbb{R}^2 z wyłączeniem prostej $x = 0$ (czyli osi y -ów), przy czym

$$(16) \quad F_y(x, y) = \frac{y - x}{x^2 + y^2} \quad (x \neq 0),$$

zatem $F_y(x, y) = 0$ w każdym punkcie (x, y) spełniającym warunek

$$y = x, \quad x \neq 0.$$

Uwzględniając ten warunek w (15) dostajemy równanie

$$\log \sqrt{2x^2} = \frac{\pi}{4},$$

mające dwa rozwiązania

$$(17) \quad x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}} \quad x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}.$$

Wynika stąd, że założenia twierdzenia 1 są spełnione, jeżeli punkt (x_0, y_0) spełniający równanie (1) nie jest żadnym z punktów $p_1 = (x_1, x_1)$ lub $p_2 = (x_2, x_2)$. W pewnym otoczeniu x_0 istnieje wówczas jedyne rozwiązanie $y = g(x)$ równania (15) będące klasy C^1 .

Aby zbadać ekstrema funkcji g znajdziemy najpierw jej punkty stacjonarne. Ponieważ

$$(18) \quad F_x(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2} \quad (x \neq 0),$$

zgodnie z warunkiem (11) punkt stacjonarny \bar{x} wyznaczamy podstawiając

$$y = -x$$

w równaniu (15) (zauważmy, że wobec tego punkt $(\bar{x}, g(\bar{x}))$ nie może być żadnym z punktów p_1, p_2 , które wyłączyliśmy z rozważań). Po podstawieniu dostajemy równanie

$$\log \sqrt{2\bar{x}^2} = -\frac{\pi}{4}$$

wyznaczające dwa punkty stacjonarne

$$(19) \quad \bar{x}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}} \quad \text{oraz} \quad \bar{x}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

Ze wzorów (16), (18) widać, że funkcja F jest klasy C^2 w rozważanym podzbiórze płaszczyzny \mathbb{R}^2 , zatem funkcja g ma drugą pochodną. Pochodną tą w punktach stacjonarnych wyznaczamy ze wzoru (14), co daje

$$(20) \quad g''(x_j) = -\frac{F_{xx}(\bar{x}_j, -\bar{x}_j)}{F_y(\bar{x}_j, -\bar{x}_j)} \quad (j = 1, 2).$$

Różniczkując (18) otrzymujemy

$$F_{xx}(x, y) = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

wobec tego

$$(21) \quad F_{xx}(\bar{x}_j, -\bar{x}_j) = \frac{1}{2(\bar{x}_j)^2} \quad (j = 1, 2),$$

ponadto z (16) wynika, że

$$(22) \quad F_y(\bar{x}_j, -\bar{x}_j) = -\frac{1}{\bar{x}_j} \quad (j = 1, 2).$$

Uwzględniając (21), (22) w równości (20) otrzymujemy

$$g''(\bar{x}_j) = \frac{1}{2\bar{x}_j} \quad (j = 1, 2).$$

Wobec (19) mamy

$$g''(\bar{x}_1) > 0, \quad g''(\bar{x}_2) < 0,$$

zatem funkcja g ma minimum w punkcie \bar{x}_1 i maksimum w punkcie \bar{x}_2 .

2. Krzywe na płaszczyźnie - opis uwikłany.

Niech F będzie funkcją klasy C^1 w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ i niech $(x_0, y_0) \in \Omega$ będzie punktem spełniającym równanie

$$(23) \quad F(x, y) = 0.$$

Zauważmy, że w twierdzeniu 1 możemy zamienić role zmiennych x, y . Jako wniosek otrzymujemy

(i) jeżeli $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, to w pewnym otoczeniu x_0 równanie (23) ma jedyne rozwiązanie

$$y = g(x);$$

(ii) jeżeli $F_x(x_0, y_0) \neq 0$, to w pewnym otoczeniu y_0 równanie (23) ma jedyne rozwiązanie

$$x = h(y);$$

(iii) funkcje g, h są klasy C^1 i przy tym

$$(24) \quad g'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \quad (y = g(x))$$

oraz

$$(25) \quad h'(y) = -\frac{F_y(x, y)}{F_x(x, y)} \quad (x = h(y)).$$

Przy wymienionych założeniach równanie (23) określa krzywą K , która lokalnie jest wykresem funkcji jednej zmiennej. Aby zbadać dokładniej własności tej krzywej założymy, że

(z) w każdym punkcie $(x, y) \in K$ (czyli spełniającym równanie (23)) przynajmniej jedna z pochodnych F_x, F_y jest różna od zera.

Jeżeli

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

to zgodnie z (24) współczynnik kierunkowy stycznej do K w punkcie (x_0, y_0) jest równy

$$g'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)},$$

zatem kierunek stycznej wyznacza wektor

$$\vec{t} = [F_y(x_0, y_0), -F_x(x_0, y_0)].$$

Ten sam wynik otrzymujemy zakładając, że

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_x(x_0, y_0) \neq 0$$

i korzystając z (25).

Wektorem normalnym do krzywej K w punkcie (x_0, y_0) nazywamy każdy wektor prostopadły do wektora \vec{t} . Przykładem takiego wektora jest

$$(26) \quad \vec{n} = [F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0)] = \overrightarrow{\text{grad}} F(x_0, y_0),$$

gdyż, jak łatwo sprawdzić, iloczyn skalarny (\vec{t}, \vec{n}) jest równy zeru. Z założenia (z) wynika, że wektor \vec{n} nie jest wektorem zerowym.

Punkt $(x_0, y_0) \in K$, w którym

$$F_x(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0) = 0$$

nazywamy *punktem osobliwym* krzywej K . Założenia sformułowane w punktach (i), (ii) nie są w tym przypadku spełnione, w otoczeniu punktu osobliwego krzywa K może więc nie być wykresem funkcji zmiennej x bądź zmiennej y . W punkcie osobliwym nie jest określony kierunek styczny ani kierunek normalny do krzywej K , oba wektory \vec{t} , \vec{n} są bowiem wektorami zerowymi. W dalszym ciągu podamy przykłady krzywych określonych równaniem (23) mających punkty osobliwe.

Przykład 4. Niech

$$F(x, y) = y^4 - (x - 1)^2.$$

Równanie (23) może być zapisane w postaci

$$(y^2 - x + 1)(y^2 + x - 1) = 0,$$

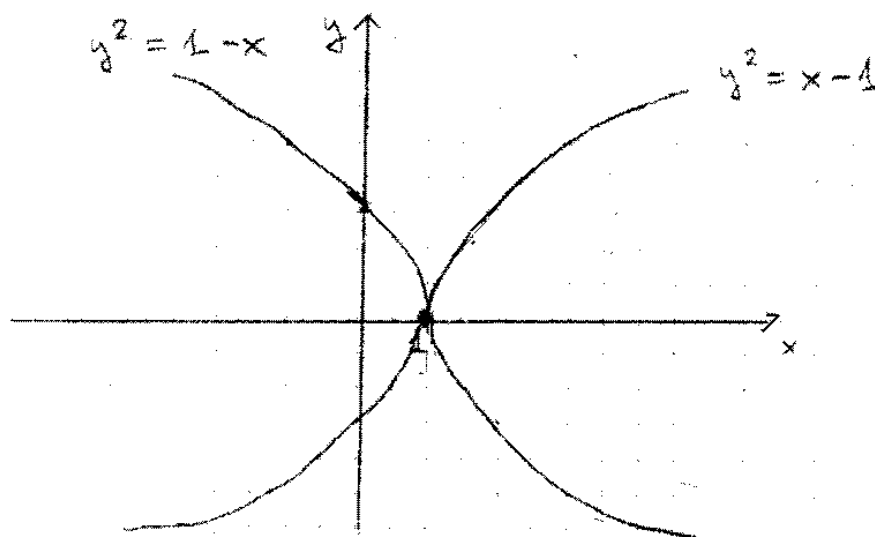
z której widać, że krzywa K składa się z dwóch parabol o równaniach

$$y^2 = x - 1$$

oraz

$$y^2 = 1 - x$$

(por. rys. 17).



[rys. 17]

Ponieważ

$$F_x = -2(x - 1), \quad F_y = 4y^3,$$

jedynym punktem osobliwym jest punkt $(1, 0)$. Z rysunku widać, że jest to punkt rozgałęzienia krzywej K .

Przykład 5. Niech

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1,$$

wówczas równanie (23) określa elipsę o środku w początku układu i półosiach a, b . Wektor normalny ma postać

$$\left[\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2} \right].$$

Jeżeli elipsa jest okręgiem o promieniu R , to $a = b = R$ i wówczas wektor normalny ma kierunek wektora

$$\vec{r} = [x, y].$$

Potwierdza to znany fakt, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia przechodzącego przez punkt styczności.

Przykład 6. Załóżmy, że obszar płaski $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jest mapą pewnego terenu i że funkcja klasy C^1

$$z = F(x, y)$$

określa wysokość punktu $(x, y) \in \Omega$ nad poziomem morza. Krzywe o równaniu

$$F(x, y) = \text{const}$$

nazywamy *poziomicami*. Ze wzoru (26) wynika, że jeżeli wektor $\overrightarrow{\text{grad}} F(x_0, y_0)$ nie jest wektorem zerowym, to określa on kierunek normalny do poziomicy przechodzącej przez punkt (x_0, y_0) .

3. Krzywe na płaszczyźnie - opis parametryczny.

Oprócz opisu uwikłanego omówionego w punkcie 2 możemy również rozważać opis parametryczny krzywej płaskiej

$$(27) \quad x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t \in \mathbb{I}),$$

gdzie \mathbb{I} jest przedziałem na osi liczbowej a funkcje $x(t), y(t)$ są ciągłe w tym przedziale. Równania (27) można interpretować jako *odwzorowanie* przedziału \mathbb{I} w płaszczyznę \mathbb{R}^2 polegające na rozciąganiu i wyginaniu odcinka osi liczbowej, jednak bez możliwości przerywania go ze względu na założoną ciągłość. Można również interpretować zmienną t jako czas, wtedy równania (27) opisują ruch punktu (x, y) po krzywej wyznaczając jednocześnie *kierunek jej obiegu* przy rosnącym t (używany jest również termin *orientacja krzywej*).

W dalszym ciągu będziemy zakładali, że krzywa K ma opis parametryczny (27) w którym funkcje $x(t), y(t)$ są klasy $C^1(\mathbb{I})$, przyjmując oznaczenia

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}.$$

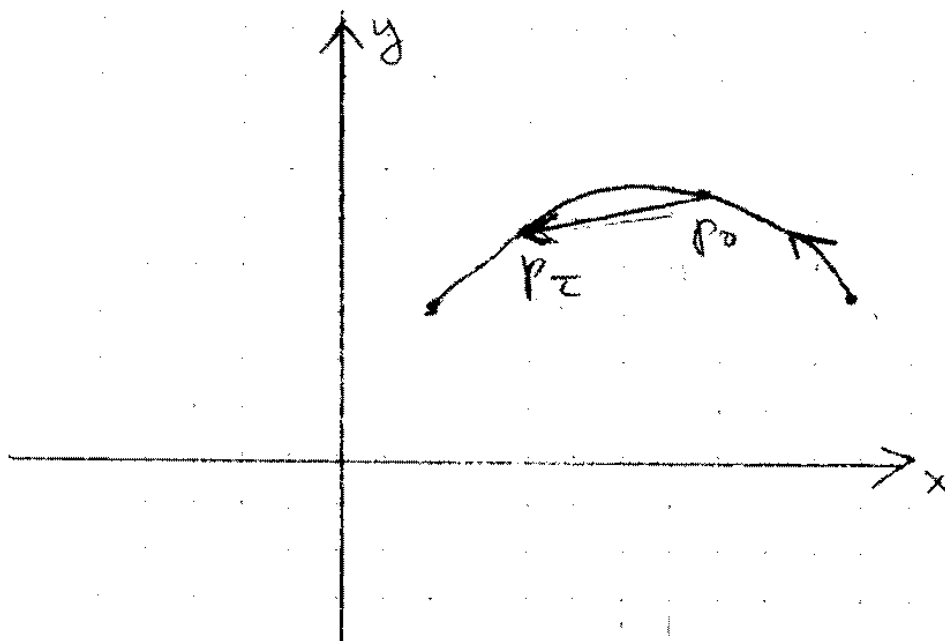
Niech

$$p_0 = (x(t_0), y(t_0)), \quad p_\tau = (x(t_0 + \tau), y(t_0 + \tau)), \quad \tau > 0, \quad t_0, t_0 + \tau \in \mathbb{P},$$

wówczas wektor

$$(28) \quad \frac{1}{\tau} \overrightarrow{p_0 p_\tau} = \left[\frac{x(t_0 + \tau) - x(t_0)}{\tau}, \frac{y(t_0 + \tau) - y(t_0)}{\tau} \right]$$

wyznacza sieczną krzywej K przechodzącą przez punkty p_0, p_τ , zaś jego zwrot jest zgodny z kierunkiem obiegu krzywej (rys. 18).



[rys. 18]

Przechodząc w (28) do granicy przy $\tau \rightarrow 0$ dostajemy wektor styczny do krzywej K w punkcie p_0

$$\vec{t} = [\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)]$$

zwrócony w kierunku obiegu krzywej. Zauważmy, że krzywa opisana równaniami parametrycznymi (27) ma w punkcie p_0 styczną tylko wtedy, gdy przynajmniej jedna z pochodnych $\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0)$ jest różna od zera. Warunek ten można zapisać w postaci nierówności

$$(29) \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$$

dla $t = t_0$. Jeżeli nie jest on spełniony, to wektor \vec{t} jest wektorem zerowym, który oczywiście nie wyznacza żadnego kierunku.

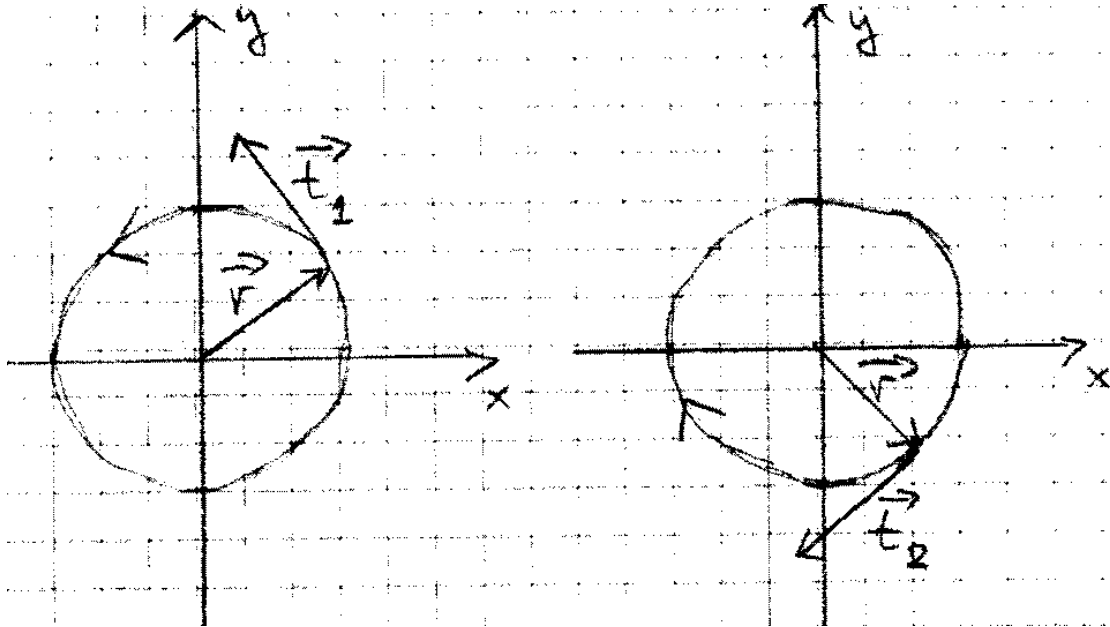
Przykład 7. Rozważmy dwa opisy parametryczne

$$(30) \quad x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

oraz

$$(31) \quad x(t) = \cos t, \quad y(t) = -\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Oba układy równań opisują okrąg o środku w początku układu i promieniu 1, wyznaczają jednak różne kierunki obiegu (rys. 19a, 19b).



[rys. 19a]

[rys. 19b]

Opis (31) wyznacza obieg zgodny z ruchem zegara, opis (30) wyznacza obieg w przeciwnym kierunku. Oznaczając przez \vec{t}_1 , \vec{t}_2 wektory styczne wyznaczone przez opis (30), (31) odpowiednio mamy

$$\vec{t}_1 = [-\sin t, \cos t] \quad \vec{t}_2 = [-\sin t, -\cos t].$$

Oznaczając przy ustalonym t

$$\vec{r} = [x(t), y(t)]$$

i obliczając iloczyny skalarne (\vec{r}, \vec{t}_1) oraz (\vec{r}, \vec{t}_2) stwierdzamy, że są one równe zero. Zatem oba wektory styczne są prostopadłe do promienia \vec{r} , co potwierdza fakt znany z geometrii.

Przykład 8. Wprowadźmy na płaszczyźnie współrzędne biegunowe r , θ (por. rozdz. II punkt 4) i niech $a > 0$ będzie ustaloną liczbą. Równanie

$$r = a\theta \quad (\theta \geq 0)$$

określa krzywą zwaną *spiralą Archimedesesa* (rys. 20). Przechodząc do współrzędnych prostokątnych otrzymujemy opis parametryczny spirali Archimedesesa

$$x = a\theta \cos \theta, \quad y = a\theta \sin \theta, \quad (\theta \geq 0),$$

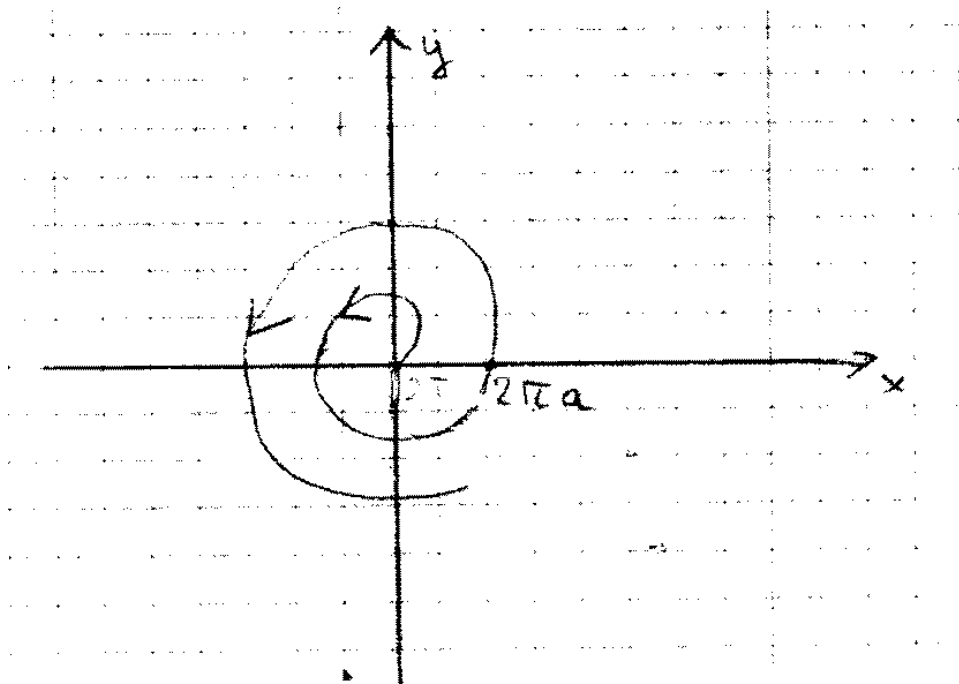
z którego wyznaczamy współrzędne wektora stycznego

$$\dot{x} = a \cos \theta - a\theta \sin \theta, \quad \dot{y} = a \sin \theta + a\theta \cos \theta.$$

Prosty rachunek daje

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2(1 + \theta^2) > 0,$$

zatem warunek (29) jest spełniony dla każdego θ . Spirala Archimedesesa ma styczną w każdym punkcie.



[rys. 20]

Przykład 9. Przy ustalonym $a > 0$ równania parametryczne

$$(32) \quad x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

opisują krzywą zwaną *asteroidą*. Różniczkując dostajemy współrzędne wektora stycznego

$$\dot{x} = -3a \cos^2 t \sin t, \quad \dot{y} = 3a \sin^2 t \cos t.$$

Ponieważ

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t,$$

warunek (29) nie jest spełniony dla wartości parametru

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{1}{2}\pi, \quad t_3 = \pi, \quad t_4 = \frac{3}{2}\pi,$$

którym odpowiadają punkty płaszczyzny

$$p_1 = (a, 0), \quad p_2 = (0, a), \quad p_3 = (-a, 0), \quad p_4 = (0, -a).$$

W pozostałych punktach asteroida ma niezerowy wektor styczny

$$\vec{t} = [\dot{x}, \dot{y}]$$

wyznaczający kierunek stycznej.

Z równań (32) możemy wyrugować parametr t , mamy bowiem

$$\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a} \cos t, \quad \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{a} \sin t.$$

Otrzymujemy w ten sposób równanie asteroidy w postaci uwikłanej (por. punkt 2)

$$(33) \quad \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{a^2} = 0.$$

Oznaczając przez $F(x, y)$ lewą stronę równania (33) dostajemy po zróżniczkowaniu

$$F_x = \frac{2}{3}x^{-1/3}, \quad F_y = \frac{2}{3}y^{-1/3},$$

skąd wynika, że funkcja F jest klasy C^1 w zbiorze otwartym Ω powstałym z płaszczyzny \mathbb{R}^2 po usunięciu z niej osi układu współrzędnych. W zbiorze Ω asteroida nie ma punktów osobliwych, gdyż żadna z pochodnych F_x, F_y nie przyjmuje w tym zbiorze wartości zero. Z postaci równania (33) widać, że asteroida jest symetryczna względem osi układu współrzędnych, wystarczy zatem zbadać jej kształt w pierwszej ćwiartce płaszczyzny czyli dla $x \geq 0, y \geq 0$.

Równanie (33) można rozwiązać względem y uzyskując w ten sposób jawny opis ćwiartki asteroidy

$$y = \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2}\right)^3} \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

czyli krócej

$$(34) \quad y = \sqrt{\left(A(x)\right)^3},$$

gdzie

$$A(x) = a^{2/3} - x^{2/3},$$

zaś przez pierwiastek rozumiemy dodatnią wartość pierwiastka kwadratowego czyli pierwiastek arytmetyczny. Funkcja $y(x)$ wyrażona wzorem (34) jest określona dla $x \geq 0$ spełniających nierówność

$$A(x) \geq 0$$

czyli w przedziale $[0, a]$. Różniczkując prawą stronę (34) dostajemy

$$(35) \quad y' = -\sqrt{A(x)} \cdot x^{-1/3}, \quad (0 < x \leq a)$$

oraz

$$(36) \quad y'' = \frac{1}{3} \left(\frac{x^{-2/3}}{\sqrt{A(x)}} + \sqrt{A(x)} \cdot x^{-4/3} \right), \quad (0 < x < a).$$

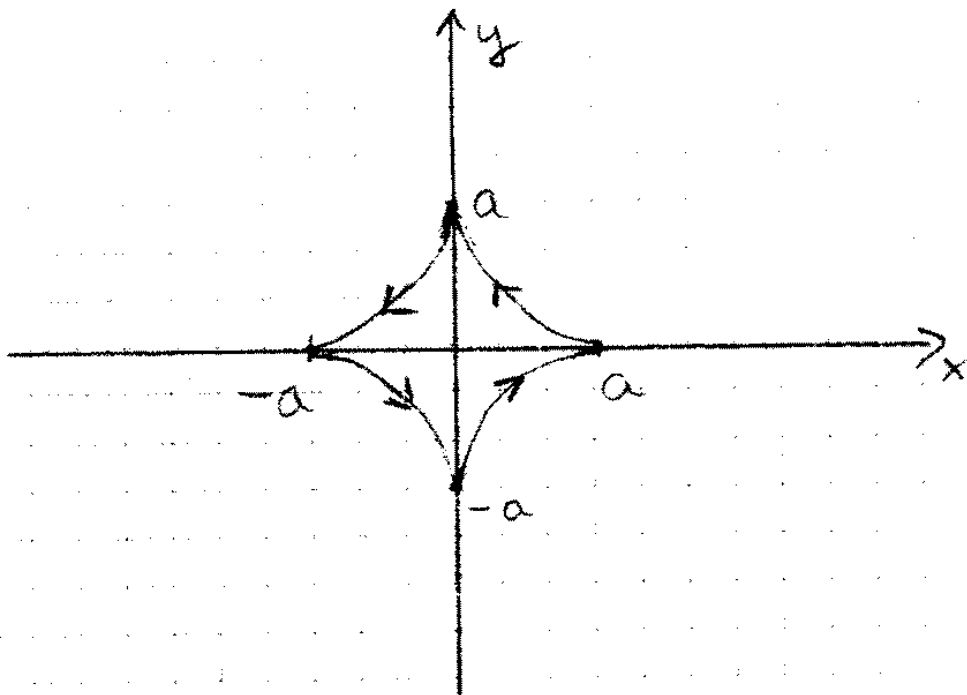
Z równości (34), (35) wynika, że

- (i) $y'(x) > 0$ dla $0 < x < a$, zatem funkcja $y(x)$ jest malejąca w przedziale $[0, a]$;
- (ii) $y(a) = y'(a) = 0$, zatem w punkcie $p_1 = (a, 0)$ asteroida jest styczna do osi x -ów;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = -\infty$,

zatem w punkcie $p_2 = (0, a)$ asteroida jest styczna do osi y -ów.

Z równości (36) widzimy, że $y'' > 0$ w przedziale $(0, a)$, zatem w pierwszej ćwiartce płaszczyzny funkcja $y(x)$ jest wypukła.

Korzystając z uzyskanych informacji możemy narysować asteroidę (rys. 21). Strzałki na rysunku wskazują kierunek obiegu asteroidy przy rosnącym t wyznaczony przez opis parametryczny (32). Zauważmy, że w punktach p_j ($j=1,2,3,4$), w których wektor \vec{t} jest wektorem zerowym, asteroida ma ostrza.



[rys. 21]

Przykład 10. Dana jest liczba $c > 0$ oraz dwa punkty płaszczyzny A, B takie, że ich odległość $d(A, B) = 2c$. *Lemniskatą Bernoulliego* nazywamy zbiór punktów $P = (x, y)$ spełniających warunek

$$(37) \quad d(P, A) \cdot d(P, B) = c^2.$$

Obierając układ współrzędnych w taki sposób, by $A = (-c, 0)$, $B = (c, 0)$ możemy warunek (37) zapisać w postaci

$$(38) \quad \left((x+c)^2 + y^2 \right) \left((x-c)^2 + y^2 \right) = c^4.$$

skąd przy oznaczeniu

$$(39) \quad x^2 + y^2 = r^2$$

wynika

$$(r^2 + c^2 + 2cx)(r^2 + c^2 - 2cx) = c^4.$$

Po wykonaniu mnożenia otrzymujemy

$$r^4 + r^2(c^2 - 2cx) + r^2(c^2 + 2cx) + (c^2 + 2cx)(c^2 - 2cx) = c^4$$

czyli

$$r^4 + 2r^2c^2 + c^4 - 4c^2x^2 = c^4.$$

Wracając do oznaczenia (39) i korzystając z równości

$$r^2 - 2x^2 = y^2 - x^2$$

dostajemy równanie lemniskaty w postaci uwikłanej

$$(40) \quad (x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Z równania (40) widać, że lemniskata jest symetryczna względem obu osi układu współrzędnych, wystarczy zatem badać ją w pierwszej ćwiartce płaszczyzny czyli dla $x \geq 0, y \geq 0$ (tą część lemniskaty nazwiemy umownie jej pierwszą ćwiartką).

Równanie (40) można zapisać we współrzędnych biegunowych (por. rozdz. II punkt 4). Ponieważ ograniczamy się do pierwszej ćwiartki, mamy

$$(41) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

co po podstawieniu do (40) daje

$$r^4 = 2c^2r^2 \cos 2\theta.$$

Równanie to jest spełnione dla $r = 0$, a więc lemniskata przechodzi przez początek układu - widać to również z równania (40). Przyjmując $r > 0$ dostajemy po skróceniu

$$(42) \quad r^2 = 2c^2 \cos 2\theta.$$

Z postaci (42) równania widać, że po odrzuceniu początku układu pierwsza ćwiartka lemniskaty leży w obszarze, w którym $\cos 2\theta > 0$ czyli $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$. Obszar ten zawarty jest między dodatnią półosią x -ów a półprostą $y = x$, $x > 0$, został on zakreskowany na rys. 22. Rozwiązując (42) względem r dostajemy równanie pierwszej ćwiartki lemniskaty we współrzędnych biegunowych

$$(43) \quad r = c\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\theta}, \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}).$$

Z równania tego wynika, że $r(\theta)$ jest funkcją ściśle malejącą w rozważanym przedziale, przy czym

$$(44) \quad r(0) = c\sqrt{2}, \quad r(\frac{\pi}{4}) = 0.$$

Aby zbadać dokładniej kształt pierwszej ćwiartki lemniskaty przejdziemy do jej opisu parametrycznego, który uzyskujemy podstawiając (43) do równań (41). Otrzymujemy

$$(45) \quad x = c\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\theta} \cos \theta, \quad y = c\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\theta} \sin \theta, \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}).$$

Po zróżniczkowaniu względem parametru θ dostajemy stąd

$$\begin{aligned} \dot{x} &= c\sqrt{2} \left(\frac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \cos \theta - \sqrt{\cos 2\theta} \sin \theta \right), \\ \dot{y} &= c\sqrt{2} \left(\frac{-\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \sin \theta + \sqrt{\cos 2\theta} \cos \theta \right), \end{aligned} \quad (0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}),$$

co można zapisać prościej

$$(46) \quad \dot{x} = -c\sqrt{2} \frac{\sin 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}, \quad \dot{y} = c\sqrt{2} \frac{\cos 3\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}, \quad (0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}).$$

Jak widać z pierwszego równania (46), pochodna $\dot{x}(\theta)$ jest ujemna dla $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, zatem funkcja $x(\theta)$ jest ściśle malejąca w przedziale $[0, \frac{\pi}{4}]$, istnieje więc funkcja odwrotną do niej $\theta(x)$. Z pierwszego równania (45) mamy

$$x(0) = c\sqrt{2}, \quad x(\frac{\pi}{4}) = 0,$$

wobec tego funkcja ciągła $x(\theta)$ przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $[0, c\sqrt{2}]$ zaś funkcja $\theta(x)$ jest określona na tym przedziale. Podstawiając $\theta = \theta(x)$ w drugim równaniu (45) dostajemy równanie pierwszej ćwiartki lemniskaty w postaci jawnej

$$(47) \quad y = g(x), \quad (0 \leq x \leq c\sqrt{2}).$$

Funkcji g nie potrafimy wyznaczyć efektywnie, możemy jednak zbadać jej przebieg przy pomocy rachunku. Stosując reguły różniczkowania funkcji złożonej oraz funkcji odwrotnej jednej zmiennej dostajemy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

czyli wobec (46), (47)

$$(48) \quad g'(x) = -\frac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta}, \quad (\theta = \theta(x), 0 \leq x \leq c\sqrt{2}).$$

Oznaczając przez $z(\theta)$ prawą stronę (48) otrzymujemy różniczkując powtórnie

$$(49) \quad g''(x) = \frac{dz}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{\dot{z}}{\dot{x}}.$$

Prosty rachunek daje

$$\dot{z} = \frac{3}{(\sin 3\theta)^2} \quad \left(0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

a stąd po uwzględnieniu (46), (49) wynika, że

$$(50) \quad g''(x) = -\frac{3}{c\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\cos 2\theta}}{(\sin 3\theta)^3} \quad (\theta = \theta(x))$$

i wobec tego

$$(51) \quad g''(x) < 0 \quad (0 < x < c\sqrt{2}).$$

Z ostatniej nierówności wynika, że wykres funkcji g czyli pierwsza ćwiartka lemniskaty jest zwrócony wypukłością ku górze. Znając pochodne funkcji g możemy znaleźć jej ekstrema. Opierając się na (48), (45) stwierdzamy, że równanie

$$g'(x) = 0$$

ma jedyne rozwiązanie

$$(52) \quad x_0 = x\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{c\sqrt{3}}{2},$$

przy czym wobec nierówności (51) funkcja g ma maksimum w punkcie x_0 . Podstawienie do drugiej równości (45) daje

$$(53) \quad g(x_0) = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{c}{2}.$$

Pozostają jeszcze do zbadania punkty przecięcia pierwszej ćwiartki lemniskaty z osiami układu. Opierając się na równaniach parametrycznych (45) stwierdzamy, że

(i) równanie $x = 0$ ma jedyne rozwiązanie $\theta = \frac{\pi}{4}$, przy czym $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$;

(ii) równanie $y = 0$ ma dwa rozwiązania $\theta = 0$ oraz $\theta = \frac{\pi}{4}$, przy czym $x(0) = c\sqrt{2}$, $x(\frac{\pi}{4}) = 0$.

Wobec tego pierwsza ćwiartka lemniskaty przecina obie osie w początku układu oraz oś x -ów w punkcie $A = (c\sqrt{2}, 0)$. Z równań (46) wynika, że

(iii) $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = c\sqrt{2}$, zatem w punkcie A lemniskata ma styczną prostopadłą do osi x -ów;

(iv) współczynnik kierunkowy stycznej dla $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ wynosi

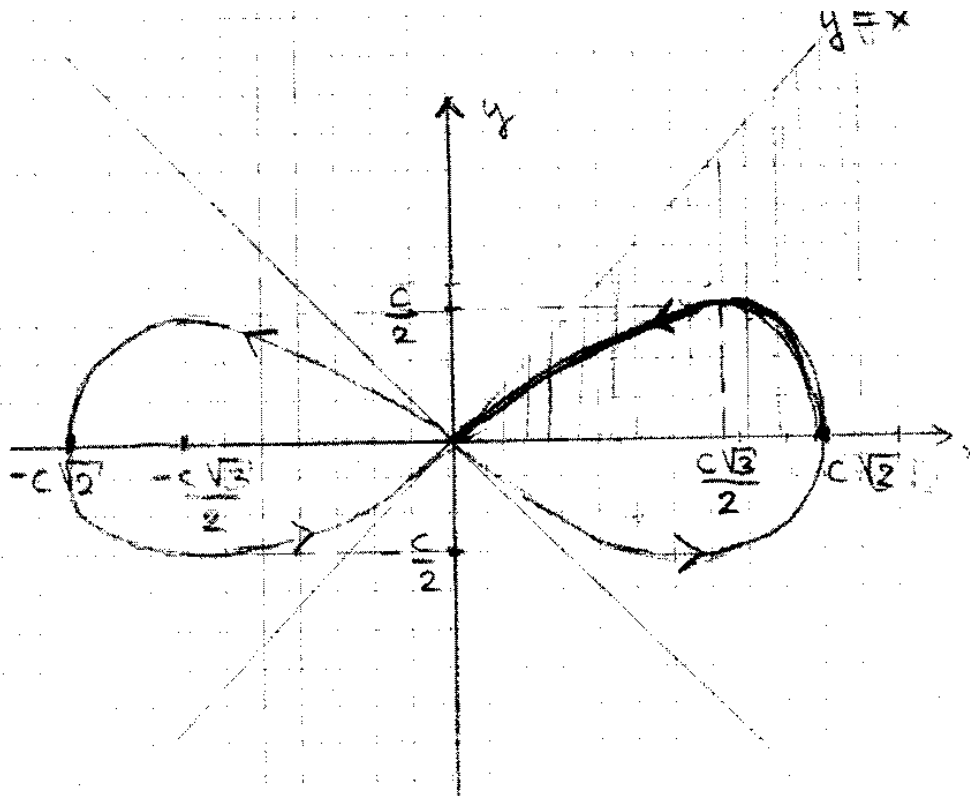
$$m(\theta) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta},$$

co daje

$$m\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\cos \frac{3\pi}{4}}{\sin \frac{3\pi}{4}} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = 1,$$

zatem w początku układu pierwsza ćwiartka lemniskaty jest styczna do prostej $y = x$.

Możemy teraz narysować pierwszą ćwiartkę lemniskaty (na rys. 22 zaznaczoną grubszą linią) a następnie poprzez odbicie symetryczne w osiach układu współrzędnych otrzymać całą lemniskatę.



[rys. 22]

Współrzędne biegunowe określone wzorami (41) możemy rozważać przyjmując dla kąta θ dowolne wartości rzeczywiste. Jeżeli założymy, że

$$-\frac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{4}\pi \quad \text{lub} \quad \frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi,$$

to równania (45) dają opis parametryczny całej lemniskaty. Opis ten wyznacza kierunek obiegu lemniskaty przy rosnącym θ , który zaznaczono strzałkami na rys. 22.

Wróćmy jeszcze do równania (40) dającego opis uwikłany lemniskaty przy czym, jak już zaznaczyliśmy, wystarczy rozważać je tylko w pierwszej ćwiartce płaszczyzny. Wobec tego dalsze rachunki będziemy przeprowadzać dla $x > 0$, $y > 0$ oznaczając przez $F(x, y)$ lewą stronę równania (40). W twierdzeniu o funkcji uwikłanej (twierdzenie 1) podane były założenia, przy których równanie to ma jedyne rozwiązanie $y = g(x)$ będące klasy C^1 . W punkcie 1 wykazaliśmy, że badanie ekstremów funkcji g należy zacząć od rozwiązania układu równań

$$(54) \quad F(x, y) = 0, \quad F_x(x, y) = 0$$

wyznaczającego punkty stacjonarne funkcji g . Ponieważ

$$(55) \quad F_x(x, y) = 4x(x^2 + y^2 - c^2), \quad F_y(x, y) = 4y(x^2 + y^2 + c^2),$$

układ (54) przyjmuje postać

$$(56) \quad (x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2),$$

$$(57) \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= c^2 \\ (x > 0, y > 0). \end{aligned}$$

Podstawiając (57) do (56) dostajemy po uproszczeniu

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2}c^2,$$

co łącznie z (57) daje

$$2x^2 = \frac{3}{2}c^2, \quad 2y^2 = \frac{1}{2}c^2.$$

W konsekwencji otrzymujemy jedyne rozwiązanie układu (56), (57)

$$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}c \quad y_0 = \frac{1}{2}c.$$

Łatwo sprawdzić, że

1^o funkcja F spełnia założenia twierdzenia 1, jeżeli jako Ω przyjmiemy zbiór określony nierównościami $x > 0$, $y > 0$ (czyli otwartą pierwszą ćwiartkę płaszczyzny), oraz

2^o punkt (x_0, y_0) określony przez (58) spełnia założenia twierdzenia 1.

Z twierdzenia tego wynika, że równanie (40) ma w obszarze Ω jedyne rozwiązanie $y = g(x)$ spełniające warunek $g(x_0) = y_0$. Oczywiście jest to to samo rozwiązanie, które otrzymaliśmy poprzednio rozważając opis parametryczny lemniskaty (por. wzory (47), (52), (53)). Zauważmy jednak, że opis parametryczny daje nam więcej informacji niż opis uwikłany: o

funkcji g danej wzorem (47) wiemy, że jest określona w całym przedziale $[0, c\sqrt{2}]$, natomiast z twierdzenia 1 wynika jedynie, że jest ona określona w pewnym otoczeniu punktu x_0 .

Ponieważ (58) określa rozwiązanie układu (54), mamy $g'(x_0) = 0$. Aby sprawdzić, czy funkcja g ma ekstremum w punkcie x_0 zbadamy znak $g''(x_0)$ opierając się na wzorze (14). Różniczkując dostajemy z (55)

$$F_{xx}(x, y) = 12x^2 + 4(y^2 - c^2)$$

skąd po łatwym rachunku

$$F_{xx}(x_0, y_0) = 6c^2 > 0.$$

Ponieważ z drugiego wzoru (55) wynika, że $F_y(x, y) > 0$ dla $y > 0$, dostajemy ostatecznie nierówność $g''(x_0) < 0$ - zatem funkcja g ma w punkcie x_0 maksimum (tą samą informację otrzymaliśmy badając opis parametryczny).

Zbadajmy jeszcze punkty przecięcia pierwszej ćwiartki lemniskaty z osiami układu współrzędnych wychodząc z opisu uwikłanego. Przyjmując $x = 0$ w (40) dostajemy równanie

$$y^4 + 2c^2y^2 = 0$$

mające jedyne rozwiązanie $y = 0$, natomiast przyjmując $y = 0$ otrzymujemy równanie

$$x^4 - 2c^2x = 0,$$

które ma dwa rozwiązania

$$x_1 = 0, \quad x_2 = c\sqrt{2}.$$

Znaleźliśmy zatem dwa punkty przecięcia $(0, 0)$ oraz $(c\sqrt{2}, 0)$ - tak jak przy badaniu opisu parametrycznego.

Na zakończenie zbadamy punkty osobliwe lemniskaty czyli takie jej punkty, w których obie pochodne F_x, F_y są równe zeru. Zgodnie z (55) równość

$$F_y(x, y) = 0$$

zachodzi jedynie dla $y = 0$. Wobec tego punkty osobliwe muszą być punktami przecięcia lemniskaty z osią x -ów. Z (40) widać, że są to punkty

$$(0, 0), \quad (c\sqrt{2}, 0), \quad (-c\sqrt{2}, 0),$$

przy czym

$$F_x(0, 0) = 0, \quad F_x(c\sqrt{2}, 0) = -4\sqrt{2}c^3, \quad F_x(-c\sqrt{2}, 0) = 4\sqrt{2}c^3.$$

Zatem jedynym punktem osobliwym lemniskaty jest początek układu. Z rys. 22 widać, że jest to punkt rozgałęzienia.

4. Krzywe w przestrzeni - opis parametryczny.

Opis parametryczny krzywej przestrzennej ma postać

$$(58) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (t \in \mathbb{P}),$$

gdzie \mathbb{P} jest przedziałem na osi liczbowej a funkcje $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ są ciągłe w tym przedziale. Podobnie, jak w przypadku krzywej płaskiej, równania (58) można interpretować jako odwzorowanie przedziału \mathbb{P} w przestrzeń \mathbb{R}^3 polegające na rozciąganiu, wyginaniu i ewentualnie zaplataniu w węzeł odcinka osi liczbowej, jednak bez możliwości rozerwania go ze względu założoną ciągłość funkcji (58). Jeżeli interpretujemy parametr t jako czas, to można uważać, że równania (58) opisują ruch punktu (x, y, z) po krzywej. Kierunek obiegu krzywej przy rosnącym t nazywamy *orientacją krzywej*.

Zakładając, że funkcje $x(t), y(t), z(t)$ mają pierwszą pochodną w przedziale \mathbb{P} i rozumując podobnie, jak w przypadku krzywej na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 (punkt 3) stwierdzamy, że wektor

$$\vec{t} = [\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0)]$$

jest styczny do krzywej w punkcie $p_0 = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ i ma zwrot zgodny z kierunkiem obiegu krzywej. Wyznacza on kierunek stycznej do krzywej w punkcie p_0 , jeżeli przynajmniej jedna z jego współrzędnych jest różna od zera. Warunek ten można zapisać w postaci nierówności

$$(59) \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 > 0$$

dla $t = t_0$.

Przykład 11. Równania parameryczne

$$(60) \quad x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt \quad (a, b > 0; t \in \mathbb{R})$$

określają linię śrubową opisaną na nieograniczonym walcu kołowym o promieniu podstawy a , którego osią jest oś z -ów. Wektor styczny w punkcie p_0 ma postać

$$\vec{t} = [-a \sin t, a \cos t, b].$$

Warunek (59) jest spełniony dla dowolnego t_0 , zatem w każdym punkcie linii śrubowej (60) istnieje styczna do niej.

5. Twierdzenie o funkcji uwikłanej dwóch zmiennych.

W punkcie 1 badaliśmy rozwiązalność względem zmiennej y równania $F(x, y) = 0$, obecnie zajmiemy się równaniem

$$(61) \quad F(x, y, z) = 0$$

badając jego rozwiązalność względem zmiennej z . Oczywiście szukane rozwiązanie, o ile istnieje, jest funkcją dwóch zmiennych x, y . Odpowiedź na postawione pytanie daje

Twierdzenie 2. Zakładamy, że F jest funkcją klasy C^1 w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ oraz że

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

dla pewnego $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. Wówczas

(i) istnieje dokładnie jedna funkcja

$$z = g(x, y)$$

określona w pewnym otoczeniu ω punktu (x_0, y_0) i spełniająca warunki

$$(62) \quad F(x, y, g(x, y)) = 0 \quad \text{dla} \quad (x, y) \in \omega, \quad g(x_0, y_0) = z_0;$$

(ii) funkcja g jest klasy $C^1(\omega)$ i przy tym

$$(63) \quad g_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, g(x, y))}{F_z(x, y, g(x, y))}, \quad g_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, g(x, y))}{F_z(x, y, g(x, y))}$$

dla $(x, y) \in \omega$.

DOWÓD. Dowód jest podobny do dowodu twierdzenia 1 i pozostawiamy go Czytelnikowi jako ćwiczenie. \square

Uwaga. Podobnie, jak w przypadku równania o dwóch zmiennych, można wzory (63) otrzymać *metodą różniczkowania tożsamości*, jeżeli wiemy już, że funkcja g ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu. Różniczkując funkcję stałą (62) mamy bowiem

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y, g(x, y)) = 0 \quad \text{dla} \quad (x, y) \in \omega$$

czyli w oparciu o twierdzenie 8 rozdz.II

$$F_x(x, y, g(x, y)) + g_x(x, y) F_z(x, y, g(x, y)) = 0 \quad \text{dla} \quad (x, y) \in \omega,$$

co daje pierwszy wzór (63). Wyprowadzenie drugiego wzoru jest analogiczne.

Przykład 12. Niech

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$

wówczas

$$F_z(x, y, z) = 2z,$$

zatem założenia twierdzenia 2 są spełnione, jeżeli $z_0 \neq 0$. Równanie (61) opisuje w naszym przykładzie sferę (tj. powierzchnię kuli) o środku w początku układu i promieniu jednostkowym i daje się łatwo rozwiązać względem z . Otrzymujemy dwa rozwiązania (odpowiadające górnej i dolnej półkuli)

$$z = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Funkcja $g(x, y)$ ma postać

$$g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{gdy} \quad z_0 > 0$$

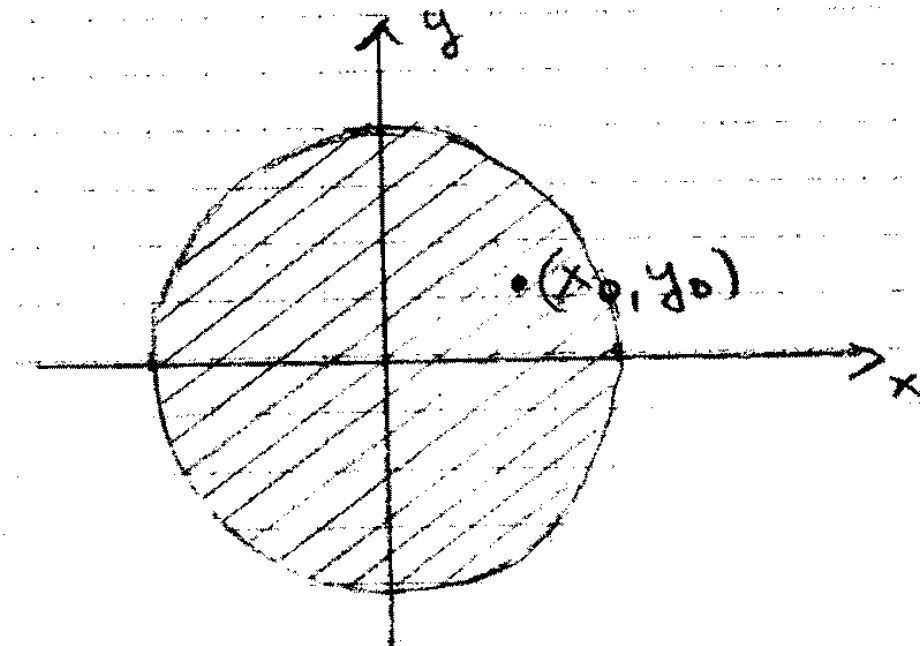
oraz

$$g(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{gdy} \quad z_0 < 0,$$

w obu przypadkach jest określona w kole domkniętym $\omega : x^2 + y^2 \leq 1$ (zakreskowanym na rys. 23). Ponieważ

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1,$$

punkt (x_0, y_0) leży wewnątrz tego koła, zatem funkcja g jest określona w jego otoczeniu - zgodnie z twierdzeniem 2.



[rys. 23]

6. Powierzchnie w przestrzeni - opis uwikłany.

Niech F będzie funkcją klasy C^1 w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ i niech $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ będzie punktem spełniającym równanie

$$(64) \quad F(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Jeżeli przynajmniej jedna z pochodnych F_x, F_y, F_z jest różna od zera w punkcie p_0 , to na mocy twierdzenia 2 (po ewentualnym zastąpieniu zmiennej z przez x lub y) równanie (61) można lokalnie rozwiązać względem jednej ze zmiennych. Przy wymienionych założeniach równanie (61) określa powierzchnię S w przestrzeni \mathbb{R}^3 , która lokalnie jest wykresem funkcji dwóch zmiennych. Warunek (64) oznacza, że punkt p_0 leży na powierzchni S .

Niech teraz $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ będzie ustalonym punktem powierzchni S i niech K będzie krzywą określoną równaniami parametrycznymi

$$(65) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

przy czym funkcje $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ mają pierwszą pochodną. Załóżymy, że

(i) krzywa K przechodzi przez punkt p_0 - nie zmniejszając ogólności można założyć (ewentualnie zastępując parametr t w opisie (65) przez $t + \text{const}$), że

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0;$$

(ii) krzywa K leży na powierzchni S - zatem istnieje liczba $\alpha > 0$ taka, że

$$(66) \quad F(x(t), y(t), z(t)) = 0 \quad \text{dla} \quad |t| < \alpha.$$

Różniczkując funkcję stałą (66) (por. rozdz. II twierdzenie 8) i przyjmując $t = 0$ dostajemy

$$(67) \quad F_x(p_0) \dot{x}(0) + F_y(p_0) \dot{y}(0) + F_z(p_0) \dot{z}(0) = 0,$$

co przy oznaczeniach

$$\vec{t}_0 = [\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)], \quad \overrightarrow{\text{grad}} F = [F_x, F_y, F_z]$$

można zapisać w postaci

$$\left(\vec{t}_0, \overrightarrow{\text{grad}} F(p_0) \right) = 0$$

(nawias $(,)$ oznacza iloczyn skalarny wektorów) - zatem wektory \vec{t}_0 oraz $\overrightarrow{\text{grad}} F(p_0)$ są prostopadłe. Jeżeli wektor $\overrightarrow{\text{grad}} F(p_0)$ nie jest wektorem zerowym, to z przeprowadzonego rachunku wynika następujący wniosek: wektor styczny w punkcie p_0 do dowolnej krzywej K przechodzącej przez punkt p_0 (por. punkt 4) leży w płaszczyźnie prostopadłej do wektora $\overrightarrow{\text{grad}} F(p_0)$. Płaszczyznę tą nazywamy *płaszczyzną styczną* do powierzchni S w punkcie p_0 . Każdy wektor prostopadły do płaszczyzny stycznej nazywamy *wektorem normalnym* - zatem wektor $\overrightarrow{\text{grad}} F(p_0)$ jest *wektorem normalnym* do powierzchni S w punkcie p_0 .

Jeżeli

$$(68) \quad F_x(p_0) = F_y(p_0) = F_z(p_0) = 0,$$

to $\overrightarrow{\text{grad}} F(p_0)$ jest wektorem zerowym i oczywiście nie wyznacza płaszczyzny stycznej ani kierunku normalnego. Mówimy, że punkt $p_0 \in S$ spełniający (68) jest *punktem osobliwym* powierzchni S .

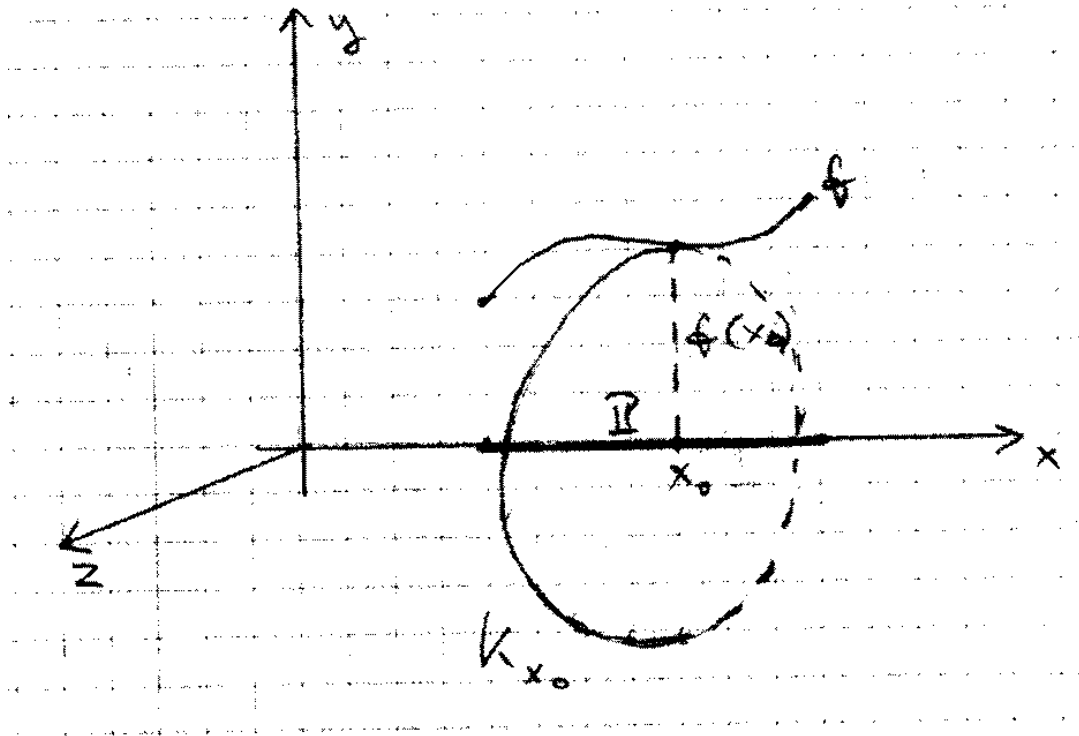
Niech $f(x) \geq 0$ będzie funkcją ciągłą w przedziale \mathbb{P} . Znajdziemy równanie powierzchni S , jaką zakreśla wykres funkcji f przy obrocie płaszczyzny xy dokoła osi x -ów. Dla ustalonego $x_0 \in \mathbb{P}$ punkt $(x_0, f(x_0))$ zakreśla przy obrocie okrąg K_{x_0} leżący w płaszczyźnie $x = x_0$ o środku $(x_0, 0, 0)$ i promieniu $f(x_0)$ (rys. 24), przy czym każdy punkt powierzchni

S leży na pewnym okręgu K_{x_0} . Wobec tego $(x, y, z) \in S$ wtedy i tylko wtedy gdy spełniona jest równość

$$f(x) = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad (x \in \mathbb{I}),$$

którą można zapisać w równoważnej postaci

$$(69) \quad f^2(x) = y^2 + z^2.$$



[rys. 24]

Podamy teraz przykłady powierzchni obrotowych.

Przykład 13. Niech

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad (R > 0, -R \leq x \leq R),$$

wówczas równanie (69) przybiera postać

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Jest to równanie powierzchni kuli o środku w początku układu i promieniu R powstałej przez obrót dookoła osi x -ów górnej połowy okręgu opisanej równaniem $y = f(x)$. Przyjmując oznaczenie

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$

znajdujemy wektor normalny

$$(70) \quad \overrightarrow{\text{grad}} F = 2[x, y, z] = 2\vec{r},$$

gdzie $\vec{r} = [x, y, z]$ jest promieniem kuli traktowanym jako wektor. Z równości (70) widać, że znaleziony wektor normalny jest zwrócony na zewnątrz kuli.

Przykład 14. Załóżmy, że

$$f(x) = A > 0, \quad (x \in \mathbb{R})$$

czyli że f jest funkcją stałą, wówczas przy obrocie jej wykresu dokoła osi x -ów dostajemy powierzchnię walca kołowego o równaniu

$$(71) \quad y^2 + z^2 - A^2 = 0$$

zgodnie z (69). Oznaczając przez F lewą stronę (71) mamy

$$F_x = 0, \quad F_y = 2y, \quad F_z = 2z.$$

Z równania (71) wynika, że w każdym punkcie powierzchni walca przynajmniej jedna z pochodnych F_y, F_z jest różna od zera - zatem powierzchnia ta nie ma punktów osobliwych. Wektor

$$\overrightarrow{\text{grad}} F = 2[0, y, z]$$

jest wektorem normalnym zwróconym na zewnątrz walca.

Przykład 15. Niech

$$f(x) = mx, \quad (m > 0, x \geq 0),$$

wówczas przy obrocie dokoła osi x -ów wykres funkcji f zakreśla powierzchnię stożka kołowego o równaniu

$$(72) \quad y^2 + z^2 - m^2x^2 = 0.$$

Oznaczając przez F lewą stronę (72) mamy

$$F_x = -2m^2x, \quad F_y = 2y, \quad F_z = 2z,$$

zatem w każdym punkcie (x, y, z) różnym od początku układu wektor

$$\overrightarrow{\text{grad}} F = 2[-m^2x, y, z]$$

jest wektorem normalnym zwróconym na zewnątrz stożka. Zgodnie z (68) początek układu (będący wierzchołkiem stożka) jest punktem osobliwym powierzchni.

Przykład 16. Jeżeli $V(x, y, z)$ jest potencjałem pola elektrostatycznego, to wektor pola

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = [V_x, V_y, V_z]$$

wskazuje kierunek siły działający na umieszczony w polu nabój próbny. Wektor ten jest prostopadły do powierzchni stałego potencjału $V(x, y, z) = \text{const}$.

7. Powierzchnie w przestrzeni - opis parametryczny.

Opis parametryczny powierzchni S w przestrzeni \mathbb{R}^3 ma postać

$$(70) \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

gdzie funkcje x, y, z są ciągłe w zbiorze Ω . Układ równości (70) można interpretować jako odwzorowanie zbioru Ω w przestrzeń \mathbb{R}^3 polegające na rozciąganiu, wyginaniu i ewentualnie zlepianiu pewnych punktów, jednak bez możliwości rozerwania go ze względu na założoną ciągłość funkcji x, y, z .

Przykład 17. Równania

$$(71) \quad x = \cos u, \quad y = \sin u, \quad z = v, \quad (0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2)$$

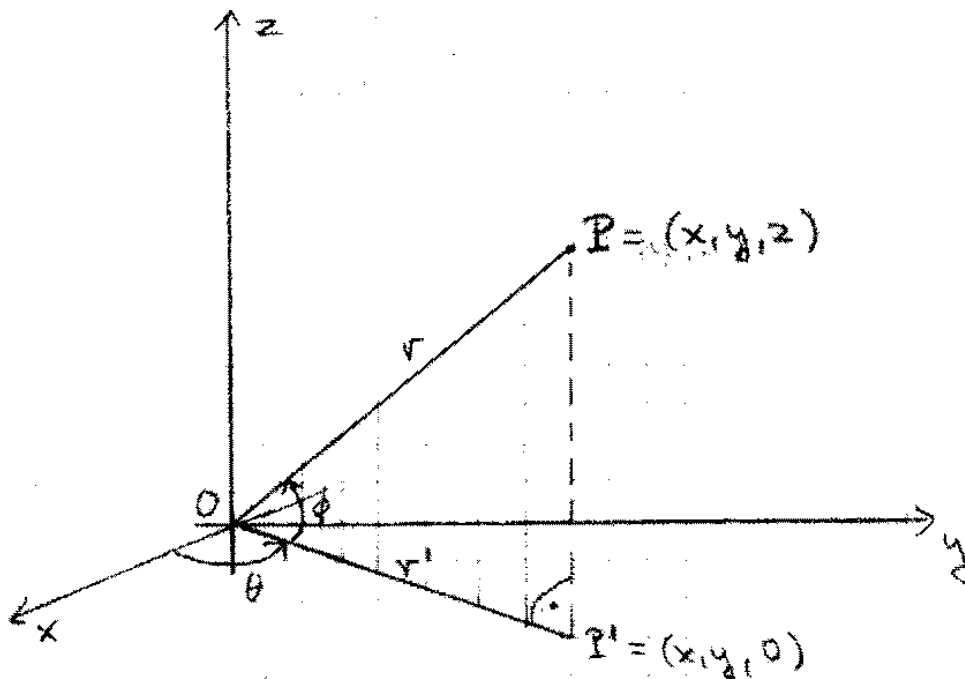
opisują walec kołowy o promieniu podstawy 1 i wysokości 2, którego osią jest oś z -ów. Zbiór Ω jest prostokątem w płaszczyźnie (u, v) , którego boki równoległe do osi v zostają zlepione przy odwzorowaniu (71).

Położenie punktu $P = (x, y, z)$ w przestrzeni \mathbb{R}^3 możemy określić przy pomocy *współrzędnych sferycznych* r, ϕ, θ , gdzie

r jest odległością punktu P od początku układu,

ϕ jest kątem, jaki tworzy wektor $\vec{r} = [x, y, z]$ z płaszczyzną (x, y) ,

θ jest kątem, jaki tworzy rzut prostopadły \vec{r}' wektora \vec{r} na płaszczyznę (x, y) z dodatnią półosią x -ów (por. rys 25).



[rys. 25]

Oznaczając odpowiednio przez r , r' długość wektora \vec{r} , \vec{r}' mamy

$$x = r' \cos \theta, \quad y = r' \sin \theta, \quad r' = r \cos \phi,$$

zatem

$$(72) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \phi \cos \theta, & y &= r \cos \phi \sin \theta, & z &= r \sin \phi, \\ & (0 \leq \theta \leq 2\pi, & -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, & r \geq 0) \end{aligned}$$

Przykład 18. Niech S będzie sferą (tj. powierzchnią kuli) o środku w początku układu i promieniu a . Jej równanie we współrzędnych sferycznych ma postać

$$r = a,$$

stąd przechodząc do współrzędnych prostokątnych przy pomocy związków (72) otrzymujemy opis parametryczny sfery S

$$(73) \quad \begin{aligned} x &= a \cos \phi \cos \theta, & y &= a \cos \phi \sin \theta, & z &= a \sin \phi, \\ & (0 \leq \theta \leq 2\pi, & -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Traktując sferę S jako powierzchnię kuli ziemskiej i używając terminologii geograficznej stwierdzamy, że

¹⁰ wartościom $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ odpowiadają bieguny $(0, 0, \pm a)$,

2^0 krzywa na powierzchni S o równaniu $\theta = \theta_0$ jest południkiem, zaś krzywa o równaniu $\phi = \phi_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ jest równoleżnikiem; dla $\phi_0 = 0$ otrzymujemy równik leżący w płaszczyźnie (x, y) .

Jeżeli potraktujemy wzory (73) jako określające odwzorowanie, to przekształca ono prostokąt domknięty

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

na sferę S , przy czym obrazem każdego z boków prostokąta $\phi = \frac{\pi}{2}$ oraz $\phi = -\frac{\pi}{2}$ jest jeden punkt będący biegunem sfery zaś boki $\theta = 0$ oraz $\theta = 2\pi$ zostają zlepione i przechodzą na południk leżący w płaszczyźnie $y = 0$.

Przypomnijmy teraz pewne pojęcia dotyczące wektorów w przestrzeni \mathbb{R}^3 . Mówimy, że wektory

$$\vec{a}_1 = [\alpha_1, \beta_1, \gamma_1], \quad \vec{a}_2 = [\alpha_2, \beta_2, \gamma_2]$$

są *liniowo niezależne*, jeżeli równość

$$\lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{a}_2 = 0$$

jest spełniona tylko dla $\lambda = \mu = 0$.

Z wektorów \vec{a}_1, \vec{a}_2 możemy utworzyć macierz M o trzech wierszach i dwóch kolumnach (czyli typu 3×2)

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix}.$$

Przez *rzęd* dowolnej macierzy typu $m \times n$ rozumiemy najwyższy stopień wyznacznika różnego od zera, jaki można z niej wyjąć. W naszym przypadku rzęd macierzy M może być równy 1 lub 2.

Przy pomocy macierzy M można sformułować warunek dostateczny liniowej niezależności wektorów \vec{a}_1, \vec{a}_2 .

Twierdzenie 3. *Jeżeli macierz M jest rzędu 2, to wektory \vec{a}_1, \vec{a}_2 są liniowo niezależne.*

Łatwo zauważyć, że twierdzenie to jest równoważne następującemu twierdzeniu algebraicznemu:

Twierdzenie 3'. *Jeżeli macierz M jest rzędu 2, to układ równań*

$$\lambda \alpha_1 + \mu \alpha_2 = 0,$$

$$\lambda \beta_1 + \mu \beta_2 = 0,$$

$$\lambda \gamma_1 + \mu \gamma_2 = 0$$

ma jedyne rozwiązanie $\lambda = \mu = 0$.

DOWÓD. Załóżmy dla ustalenia uwagi, że

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

wówczas dwa pierwsze równania mają jedyne rozwiązanie $\lambda = \mu = 0$, które oczywiście spełnia również trzecie równanie.

Uwaga. Można udowodnić, że warunek dostateczny liniowej niezależności wektorów podany w twierdzeniu 3 jest również warunkiem koniecznym. Twierdzenie 3' jest szczególnym przypadkiem ogólnego twierdzenia dotyczącego układów jednorodnych równań liniowych.

Założmy teraz, że macierz M jest rzędu 2 (zatem zgodnie z twierdzeniem 3 wektory \vec{a}_1, \vec{a}_2 są liniowo niezależne), wówczas zbiór wszystkich kombinacji liniowych

$$\lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{a}_2 \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

tworzy płaszczyznę Π rozpiętą na tych wektorach. Oznaczając jako D_j wyznacznik powstały z macierzy M przez skreślenie j -tego wiersza utworzymy wektor

$$\vec{w} = [D_1, -D_2, D_3],$$

przy uczynionych założeniach nie jest to wektor zerowy. Obliczymy teraz iloczyny skalarne (\vec{a}_1, \vec{w}) oraz (\vec{a}_2, \vec{w}) . Mamy

$$(74) \quad (\vec{a}_1, \vec{w}) = \alpha_1 D_1 - \beta_1 D_2 + \gamma_1 D_3$$

czyli

$$(75) \quad (\vec{a}_1, \vec{w}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix},$$

gdyż prawa strona (74) stanowi rozwinięcie według pierwszej kolumny wyznacznika w równości (75). Podobnie otrzymujemy

$$(76) \quad (\vec{a}_2, \vec{w}) = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Oba wyznaczniki są równe zeru, gdyż każdy z nich ma dwie jednakowe kolumny, zatem z (75), (76) dostajemy

$$(\vec{a}_1, \vec{w}) = (\vec{a}_2, \vec{w}) = 0.$$

Z ostatniej równości wynika, że wektor \vec{w} jest prostopadły do płaszczyzny Π .

Przeprowadzone rozważania zastosujemy do znalezienia płaszczyzny stycznej i wektora normalnego do powierzchni w oparciu o jej opis parametryczny (70). Niech $p_0 \in S$ będzie ustalonym punktem określonym przez wartości parametrów (u_0, v_0) . Mamy zatem $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$, gdzie

$$x_0 = x(u_0, v_0), \quad y = y(u_0, v_0), \quad z_0 = z(u_0, v_0).$$

Krzywa K leżąca na powierzchni S określona jest przez układ równań

$$(77) \quad u = u(t), \quad v = v(t),$$

które wstawione do (70) dają opis parametryczny K w przestrzeni \mathbb{R}^3

$$(78) \quad x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad z = z(u(t), v(t)).$$

Jeżeli krzywa ta przechodzi przez punkt p_0 , to (po ewentualnym zastąpieniu parametru t przez $t + \text{const.}$) mamy

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0,$$

przy czym funkcje $u(t)$, $v(t)$ są określone dla $|t| < \alpha$, gdzie α jest pewną liczbą dodatnią. Załóżmy teraz, że funkcje (70) są klasy $C^1(\Omega)$ zaś funkcje (77) mają pierwszą pochodną dla $|t| < \alpha$, wówczas współrzędne wektora stycznego do krzywej K w punkcie p_0 możemy wyznaczyć ze wzorów (78) stosując regułę różniczkowania superpozycji (twierdzenie 6 rozdz. II). Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x_u \dot{u} + x_v \dot{v}, & \dot{y} &= y_u \dot{u} + y_v \dot{v}, & \dot{z} &= z_u \dot{u} + z_v \dot{v}, \\ & & (t = 0, u = u_0, v = v_0), \end{aligned}$$

co można zapisać krócej w postaci wektorowej

$$(79) \quad \dot{\vec{r}}(0) = \vec{r}_u(u_0, v_0) \dot{u}(0) + \vec{r}_v(u_0, v_0) \dot{v}(0),$$

jeżeli przyjmiemy oznaczenia

$$\vec{r} = [x, y, z], \quad \vec{r}_u = [x_u, y_u, z_u], \quad \vec{r}_v = [x_v, y_v, z_v].$$

Oznaczając przez f odwzorowanie zbioru Ω w przestrzeń \mathbb{R}^3 określone wzorami (70) wprowadzimy macierz

$$f'(u, v) = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix}$$

- macierz ta nazywa się *pochodną odwzorowania f* , stąd oznaczenie przypominające pochodną funkcji jednej zmiennej. Łatwo zauważyć, że macierz f' jest odpowiednikiem macierzy M , jeżeli przyjmiemy $\vec{a}_1 = \vec{r}_u$, $\vec{a}_2 = \vec{r}_v$.

Założmy teraz, że macierz $f'(u_0, v_0)$ jest rzędu 2. Wobec tego wektory

$$\vec{r}_u(u_0, v_0), \quad \vec{r}_v(u_0, v_0)$$

rozpinają płaszczyznę Π_0 , przy czym z równości (79) wynika, że w płaszczyźnie tej leży wektor styczny w punkcie p_0 do dowolnej krzywej K leżącej na powierzchni i przechodzącej przez ten punkt. Płaszczyzna Π_0 jest zatem *płaszczyzną styczną* do powierzchni S w

punkcie p_0 . Każdy wektor prostopadły do płaszczyzny Π_0 nazywamy *wektorem normalnym* do powierzchni S w punkcie p_0 (por. punkt 6). Jeden z takich wektorów ma postać

$$\vec{n}_0 = [\Delta_1, -\Delta_2, \Delta_3],$$

gdzie Δ_j oznacza wyznacznik powstały z macierzy $f'(u_0, v_0)$ przez skreślenie j -tego wiersza.

Przykład 19. Wróćmy do sfery S o środku w początku układu i promieniu a rozważanej w Przykładzie 18, której opis parametryczny wyznaczają wzory (73). Różniczkując otrzymujemy

$$f'(\phi, \theta) = \begin{bmatrix} -a \sin \phi \cos \theta, & -a \cos \phi \sin \theta \\ -a \sin \phi \sin \theta, & a \cos \phi \cos \theta \\ a \cos \phi, & 0 \end{bmatrix}.$$

Po prostym rachunku dostajemy

$$\Delta_1 = -a^2 \cos^2 \phi \cos \theta, \quad \Delta_2 = a^2 \cos^2 \phi \sin \theta, \quad \Delta_3 = -a^2 \sin \phi \cos \phi$$

i stąd

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 = a^4 \cos^2 \phi.$$

Z ostatniej równości wynika, że macierz $f'(\phi, \theta)$ jest rzędu 2 jeżeli $\phi \neq \pm \frac{\pi}{2}$. Wobec tego w każdym punkcie nie będącym biegunem sfery wektory \vec{r}_ϕ , \vec{r}_θ są liniowo niezależne i rozpinają płaszczyznę styczną, zaś wektor normalny \vec{n}_0 ma postać

$$(80) \quad \vec{n}_0 = -a^2 [\cos^2 \phi \cos \theta, \cos^2 \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \phi].$$

Porównując wzory (72) i (80) widzimy, że

$$\vec{n}_0 = -a(\cos \phi)\vec{r},$$

gdzie $\vec{r} = [x, y, z]$, zatem wektor normalny \vec{n}_0 jest zwrócony do wnętrza sfery. W punktach będących biegunami mamy $\phi = \frac{\pi}{2}$ lub $\phi = -\frac{\pi}{2}$, wobec tego wektor \vec{n}_0 jest w tych punktach wektorem zerowym i nie wyznacza kierunku normalnego.

8. Ekstrema warunkowe funkcji dwóch zmiennych.

Badanie ekstremów funkcji dwóch zmiennych zostało omówione w rozdziale III. Zakładaliśmy tam, że funkcja $f(x, y)$ jest określona w pewnym zbiorze otwartym w płaszczyźnie \mathbb{R}^2 i szukaliśmy punktów, w których funkcja ta przyjmuje lokalnie największą względnie najmniejszą wartość. Obecnie postawimy zagadnienie inaczej. Będziemy badać ekstrema funkcji f zawiężając ją do zbioru punktów spełniających warunek

$$(81) \quad F(x, y) = 0.$$

Oznaczmy przez K zbiór punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ spełniających (81). Wiemy (por. punkt 2), że przy pewnych założeniach o regularności funkcji F zbiór K jest krzywą, która lokalnie jest wykresem funkcji jednej zmiennej $y = g(x)$ lub $x = h(y)$.

Mówimy, że funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie $(a, b) \in K$ *maksimum warunkowe* (*minimum warunkowe*) przy warunku (81), jeżeli istnieje takie otoczenie U punktu (a, b) , że dla $(x, y) \in U \cap K$ zachodzi nierówność

$$f(a, b) \geq f(x, y) \quad \left(f(a, b) \leq f(x, y) \right).$$

Przez *ekstremum warunkowe* funkcji $f(x, y)$ przy warunku (81) rozumiemy jej maksimum warunkowe lub minimum warunkowe.

W dalszym ciągu będziemy zakładali, że

(z₁) funkcje F, f są klasy C^1 w zbiorze otwartym Ω zawierającym zbiór K ,

(z₂) w każdym punkcie zbioru Ω przynajmniej jedna z pochodnych F_x, F_y jest różna od zera.

Przypuśćmy, że funkcja f ma w punkcie $(a, b) \in K$ ekstremum warunkowe przy warunku (81) i niech dla ustalenia uwagi

$$F_y(a, b) \neq 0.$$

Wówczas, zgodnie z twierdzeniem o funkcji uwikłanej (twierdzenie 1), istnieje funkcja $y = g(x)$ klasy C^1 taka, że w pewnym otoczeniu punktu (a, b) zbiór K jest jej wykresem. Wobec tego funkcja jednej zmiennej $h(x) = f(x, g(x))$ ma ekstremum w punkcie a , a stąd wynika, że

$$(82) \quad h'(a) = 0.$$

Pochodną funkcji h możemy obliczyć korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu superpozycji (twierdzenie 6 rozdz. II). Otrzymujemy

$$h'(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y)g'(x) \quad (y = g(x)),$$

wobec tego z (82) wynika, że

$$f_x(a, b) + f_y(a, b)g'(a) = 0.$$

Ostatnią równość można zapisać w postaci wektorowej

$$(83) \quad \left(\overrightarrow{\text{grad}} f(a, b), \vec{t} \right) = 0,$$

jeżeli przyjmiemy oznaczenie

$$\vec{t} = [1, g'(a)].$$

Zauważmy, że

1^o wektor \vec{t} jest wektorem stycznym do krzywej K w punkcie (a, b) ;

2^o z równości (83) wynika, że wektory \vec{t} oraz $\overrightarrow{\text{grad}} f(a, b)$ są prostopadłe.

Wobec tego wektor $\overrightarrow{\text{grad}} f(a, b)$ ma kierunek normalny do krzywej K , zatem (por. punkt 2) istnieje liczba λ taka, że

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(a, b) + \lambda \overrightarrow{\text{grad}} F(a, b) = 0$$

co można zapisać w postaci skalarnej jako układ dwóch równości

$$f_x(a, b) + \lambda F_x(a, b) = 0, \quad f_y(a, b) + \lambda F_y(a, b) = 0$$

lub, przyjmując oznaczenie $\Phi_\lambda = f + \lambda F$, jako

$$(84) \quad \frac{\partial}{\partial x} \Phi_\lambda(a, b) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \Phi_\lambda(a, b) = 0.$$

Układ równości (84) oznacza, że punkt (a, b) jest punktem stacjonarnym funkcji Φ_λ . Doszliśmy w ten sposób do twierdzenia:

Twierdzenie 4. *Jeżeli przy założeniach z_1, z_2 funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie $(a, b) \in K$ ekstremum warunkowe przy warunku (81), to istnieje takie λ , że punkt (a, b) jest punktem stacjonarnym funkcji*

$$\Phi_\lambda = f + \lambda F.$$

Twierdzenie 4 daje metodę wyznaczania punktów, w których funkcja f może mieć ekstremum warunkowe (zauważmy, że podaje ono jedynie warunek konieczny dla istnienia ekstremum). Punkty te znajdujemy z układu równań (81), (84). Jest to *metoda mnożników Lagrange'a*, funkcja Φ_λ bywa nazywana *funkcją Lagrange'a*.

Przykład 20. Znajdziemy ekstrema warunkowe funkcji

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

przy warunku

$$(85) \quad x^2 + y^2 = 1.$$

W rachunku, który przeprowadzimy, wygodnie będzie zastąpić parametr λ w funkcji Lagrange'a przez $-\lambda$, przyjmiemy wobec tego

$$\Phi_\lambda(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Punkty stacjonarne funkcji Φ_λ znajdujemy z układu równań

$$(86) \quad Ax + By - \lambda x = 0, \quad Bx + Cy - \lambda y = 0$$

uzupełnionego warunkiem (85). Z warunku tego wynika, że szukane punkty stacjonarne leżą na okręgu o środku w początku układu i promieniu 1, zatem interesują nas jedynie rozwiązania niezerowe liniowego układu jednorodnego (86). Rozwiązania takie istnieją tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

$$(87) \quad \begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ B & C - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

co oznacza, że λ jest wartością własną macierzy

$$(88) \quad \begin{bmatrix} A, & B \\ B, & C \end{bmatrix}.$$

Warunek (87) można zapisać w postaci równania kwadratowego

$$(A - \lambda)(C - \lambda) - B^2 = 0$$

o wyróżniku

$$\Delta = (A - C)^2 + 4B^2.$$

Jeżeli $\Delta = 0$, to $A = C$, $B = 0$ i wobec tego funkcja f jest stała na okręgu (85). Odrzucając ten przypadek mamy $\Delta > 0$, zatem macierz (88) ma dwie różne wartości własne λ_1, λ_2 . Przyjmijmy $\lambda = \lambda_j$ ($j = 1, 2$) i niech (α_j, β_j) będzie niezerowym rozwiązaniem układu (86). Ponieważ jest to układ jednorodny, jego rozwiązania są określone z dokładnością do stałego czynnika, wobec tego punkt

$$(a_j, b_j) = \frac{(\alpha_j, \beta_j)}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}}$$

jest również rozwiązaniem układu (86) i spełnia warunek (85). Dostajemy w ten sposób dwa punkty stacjonarne funkcji Lagrange'a. Zauważmy, że okrąg (85) jest zbiorem zwartym, zatem na mocy twierdzenia Weierstrassa (twierdzenie 6 rozdz. III) funkcja ciągła f osiąga na nim swoją największą i najmniejszą wartość. Wobec tego w jednym z punktów stacjonarnych funkcja f ma maksimum a w drugim minimum.

Na zakończenie załóżmy jeszcze raz, że $\lambda = \lambda_j$, wobec tego punkt stacjonarny (a_j, b_j) jest rozwiązaniem układu (86). Mnożąc pierwsze równanie przez a_j , drugie przez b_j dostajemy

$$Aa_j^2 + Ba_jb_j - \lambda a_j^2 = 0, \quad Ba_jb_j + Cb_j^2 - \lambda b_j^2 = 0$$

co po dodaniu i uwzględnieniu warunku (85) daje

$$f(a_j, b_j) = \lambda_j.$$

Oznacza to, że wartości ekstremalne funkcji f na okręgu (85) są równe wartościom własnym macierzy (87).

Przykład 21. Na elipsie

$$(89) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

znaleźć punkty najbliższy i najdalszy od początku układu współrzędnych. Ze względów rachunkowych wygodnie będzie zastąpić odległość punktu od początku układu przez jej kwadrat. Mamy zatem znaleźć ekstrema warunkowe funkcji

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

przy warunku (89). Podobnie, jak w poprzednim przykładzie, z twierdzenia Weierstrassa wynika, że funkcja f osiąga na elipsie (89) swoją największą i najmniejszą wartość. Wiemy ponadto, że wartości te mogą być osiągnięte jedynie w punktach stacjonarnych funkcji Lagrange'a Φ_λ . Mamy

$$\Phi_\lambda(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right),$$

punkty stacjonarne wyznaczamy więc z układu równań

$$(90) \quad x \left(1 + \frac{\lambda}{a^2} \right) = 0, \quad y \left(1 + \frac{\lambda}{b^2} \right) = 0$$

uzupełnionego warunkiem (89), z którego wynika, że interesują nas jedynie rozwiązania niezerowe. Równania (90) są spełnione, gdy

- (i) $x = 0$, $\lambda = -b^2$, wówczas z (89) wynika, że $y = \pm b$;
- (ii) $y = 0$, $\lambda = -a^2$, wówczas (89) daje $x = \pm a$.

Dostajemy w ten sposób cztery punkty stacjonarne funkcji Φ_λ

$$p_1 = (a, 0), \quad p_2 = (-a, 0), \quad p_3 = (0, b), \quad p_4 = (0, -b)$$

przy czym

$$f(p_1) = f(p_2) = a^2 = f_{maks}$$

oraz

$$f(p_3) = f(p_4) = b^2 = f_{min}$$

- zgodnie z naszą intuicją geometryczną (proponujemy Czytelnikowi zrobienie rysunku.)

Zadania.

1. Sprawdzić, czy podane niżej równania określają y jako funkcję x ;
 - a.) $x = \cos y$ w otoczeniu punktu $(1, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3})$, $(2, \frac{\pi}{2})$;
 - b.) $x^2 - 2y - 1 = 0$ w otoczeniu punktu $(\sqrt{3}, 1)$, $(3, 3)$;
 - c.) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 1$ w otoczeniu punktu $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(3, 2)$;
 - d.) $x - \sin y = 0$ w otoczeniu punktu $(1, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$.

2. Niech $y = g(x)$ będzie rozwiązaniem równania

$$a.) \quad y - \operatorname{arctg} y = x^3, \quad b.) \quad xe^y + ye^x = 2, \quad c.) \quad x^2 + y = \sin y$$

określonym w otoczeniu punktu x_0 i spełniającym warunek $g(x_0) = y_0$. Sprawdzić, przy jakich warunkach nałożonych na punkt (x_0, y_0) rozwiązanie takie istnieje, następnie znaleźć pierwszą i drugą pochodną funkcji g .

3. Okazać, że równanie

$$x2^y - x^2y^2 + (1 - x^2) \sin y = 0$$

ma rozwiązanie $y = g(x)$, którego wykres przechodzi przez początek układu. Znaleźć $g'(0)$, $g''(0)$.

4. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej $y = g(x)$ określonej równaniem

a.) $x^3 + y^3 = 8xy$, b.) $x^2 + y^2 - 2x - xy + 4y = 0$, c.) $x^2 - 2xy - 3y^2 + 4 = 0$.

5. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej $x = h(y)$ określonej równaniem

a.) $xy^2 + 2x^2 + 2y = 0$, b.) $x^2 + y^2 + e^x + 4y - 4x = 0$.

6. Znaleźć wektor styczny i normalny oraz napisać równanie stycznej do krzywej określonej równaniem

- a.) $x + x^3 = y + y^3$ w punkcie $(1, 1)$,
 b.) $2 + x^3 = e^x + e^y - y^3$ w punkcie $(0, 0)$,
 c.) $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ w punkcie $(1, 1)$,
 d.) $xe^y + ye^x = e^{xy}$ w punkcie $(1, 0)$.

7. Rozważmy krzywe na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 określone we współrzędnych biegunowych r, θ (por. rozdz. II punkt 4) równaniem

- a.) $r = \frac{a}{\theta}$, $\theta > 0$ - *spirala hiperboliczna*,
 b.) $r = ae^{\lambda\theta}$, $\theta > 0$ - *spirala logarytmiczna*

(a, λ oznaczają stałe dodatnie). Wykorzystując związek między współrzędnymi prostokątnymi a współrzędnymi biegunowymi podać opis parametryczny każdej z tych krzywych i znaleźć wektor styczny w dowolnie ustalonym jej punkcie. Zrobić rysunek, zaznaczając orientację krzywej narzuconą przez znaleziony opis parametryczny.

8. Opisać słownie przebieg krzywej przestrzennej określonej równaniami

$$x = t \cos t, \quad y = t \sin t, \quad z = t \quad (t \in [0, \infty))$$

i znaleźć wektor styczny do niej w dowolnie ustalonym punkcie.

9. Rozważmy równania

a.) $4x^2 + zx^2 - y^2z = 0$, b.) $e^z - \log(xy) + \frac{x}{y} = 0$,
 c.) $e^{x+y} - e^{x-z} + e^{-y-z} = 0$, d.) $z(xy)^3 - x^3 + y^3z = 0$.

Podać warunek dostateczny lokalnej rozwiązalności każdego z tych równań względem x, y, z .

10. Znaleźć wektor normalny i płaszczyznę styczną w dowolnie ustalonym punkcie powierzchni określonej równaniem

$$\begin{aligned} \text{a.) } xy^2 + 2x^2 + 2yz^2 &= 0, & \text{b.) } x^2z + y^2 + e^x + 4yz^3 - 4x &= 0, \\ \text{c.) } \sin(x^2z^2) + e^{z^2} + 4^x + 4xy - 4x &= 0. \end{aligned}$$

11. Udowodnić, że równanie płaszczyzny stycznej do elipsoidy o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

w punkcie (x_0, y_0, z_0) ma postać

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

12. Pokazać, że powierzchnie określone równaniami

$$z(4x - y) = xy \quad \text{oraz} \quad 3z^2 = 5x - 2$$

przecinają się w punkcie $(1, 2, 1)$ pod kątem prostym.

Uwaga. Przez kąt między powierzchniami rozumiemy kąt między płaszczyznami stycznymi do nich.

13. Jaka powierzchnię w przestrzeni \mathbb{R}^3 opisują równania parametryczne

$$\begin{aligned} \text{(i) } x = t \cos \theta, \quad y = t \sin \theta, \quad z = t, & & \text{(ii) } x = \cos \theta, \quad y \sin \theta, \quad z = t, \\ (t \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi)? & & \end{aligned}$$

Traktując wzory (i) względnie (ii) jako odwzorowanie płaszczyzny (t, θ) w przestrzeń \mathbb{R}^3 podać sens geometryczny tego odwzorowania i znaleźć jego pochodną. Znaleźć wektor normalny w dowolnie ustalonym punkcie rozważanych powierzchni.

14. Znaleźć ekstrema funkcji

$$f(x, y) = 3\sqrt{2}x + 3y - 1$$

na elipsie

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = 1.$$

15. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji

$$f(x, y) = x^2 y^2$$

przy warunku

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

16. Znaleźć ekstrema funkcji

$$f(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2$$

na okręgu

$$x^2 + y^2 = 1.$$

17. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

przy warunku

$$x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

Podać sens geometryczny.

18. Opisaną w punkcie 8 definicję ekstremum warunkowego i metodę mnożników Lagrange'a przenieść na przypadek funkcji trzech zmiennych. Posługując się tą metodą znaleźć punkty najbliższy i najdalszy od początku układu współrzędnych na elipsoidzie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c > 0).$$

Wskazówka. Porównać z Przykładem 21.

19. Znaleźć układ funkcji $x(t)$, $y(t)$ (gdzie t oznacza czas) opisujący podany ruch:

a.) Cząstka porusza w prawo się po paraboli $y = x^2$, zaczynając od punktu $(1, 1)$ w chwili $t = 0$, łądując w punkcie $(2, 4)$ w chwili $t = 3$. Prędkość pozioma cząstki jest proporcjonalna do upływu czasu t .

b.) Cząstka porusza się w prawo po krzywej $y = x^3$, zaczynając od punktu $(1, 1)$ w chwili $t = 2$ i kończąc w punkcie $(2, 8)$ dla $t = 4$. Współczynnik kątowy stycznej do toru cząstki w punkcie, w którym się znajduje, jest proporcjonalny do czwartej potęgi czasu, jaki upłynął od początku ruchu.