

Całka krzywoliniowa na płaszczyźnie

1. Całka krzywoliniowa zorientowana.

Przez *krzywą* na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 będziemy rozumieli zbiór K punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ określony równaniami

$$(1) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad (a \leq t \leq b),$$

gdzie funkcje $x(t)$, $y(t)$ są ciągłe w przedziale $[a, b]$. Zmienną t nazywamy *parametrem* zaś układ równań (1) - *opisem parametrycznym* krzywej K . Krzywe na płaszczyźnie opisane parametrycznie rozważaliśmy poprzednio w rozdziale IV punkt 3. Przypominamy, że opis parametryczny (1) wyznacza kierunek, w jakim punkt $(x(t), y(t))$ porusza się po krzywej K przy rosnącym t . Mówimy, że opis (1) wyznacza *orientację* krzywej K (por. Przykłady 7, 8, 9 rozdz. IV punkt 3). Punkt $A = (x(a), y(a))$ nazywamy *początkiem* krzywej K , punkt $B = (x(b), y(b))$ - *końcem* krzywej K .

Niech $P(x, y)$ będzie funkcją określoną i ciągłą na krzywej K mającej opis parametryczny (1). Wprowadzając podział przedziału $[a, b]$

$$\Pi: \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$$

i obierając punkty pośrednie

$$\tau_j \in [t_{j-1}, t_j], \quad (j = 1, 2, \dots, r)$$

utworzymy sumę przybliżoną

$$(2) \quad S(P, \Pi, \tau(\Pi)) = \sum_{j=1}^r P(x(\tau_j), y(\tau_j)) \Delta x_j,$$

gdzie

$$\Delta x_j = x(t_j) - x(t_{j-1}).$$

Przypominamy (por. rozdz. V punkt 1), że *średnicą podziału* Π nazywamy liczbę

$$d(\Pi) = \max_j (t_j - t_{j-1}),$$

zaś ciąg podziałów $\{\Pi_n\}$ spełniający warunek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\Pi_n) = 0$$

nazywamy *ciągami normalnymi podziałów*.

Jeżeli istnieje liczba A taka, że dla dowolnego ciągu normalnego podziałów $\{\Pi_n\}$ przedziału $[a, b]$ i dowolnego układu punktów pośrednich $\tau(\Pi_n)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(P, \Pi_n, \tau(\Pi_n)) = A,$$

to mówimy, że istnieje *całka krzywoliniowa*

$$(3) \quad \int_K P(x, y) dx$$

(czytamy: całka krzywoliniowa po krzywej K funkcji $P(x, y)$ względem x) i przyjmujemy

$$\int_K P(x, y) dx = A.$$

Mamy zatem

$$\int_K P(x, y) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S(P, \Pi_n, \tau(\Pi_n))$$

niezależnie od sposobu, w jaki obraliśmy ciąg normalny podziałów $\{\Pi_n\}$ i punkty pośrednie $\tau(\Pi_n)$. Zupełnie podobnie możemy dla funkcji $Q(x, y)$ określonej i ciągłej na krzywej K wprowadzić sumę przybliżoną

$$(4) \quad \tilde{S}(Q, \Pi, \tau(\Pi)) = \sum_{j=1}^r Q(x(\tau_j), y(\tau_j)) \Delta y_j,$$

gdzie

$$\Delta y_j = y(t_j) - y(t_{j-1}).$$

Jeżeli istnieje liczba B taka, że dla dowolnego ciągu normalnego podziałów $\{\Pi_n\}$ przedziału $[a, b]$ i dowolnego układu punktów pośrednich $\tau(\Pi_n)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}(Q, \Pi_n, \tau(\Pi_n)) = B,$$

to mówimy, że istnieje *całka krzywoliniowa*

$$(5) \quad \int_K Q(x, y) dy$$

(czytamy: całka krzywoliniowa po krzywej K funkcji $Q(x, y)$ względem y) i przyjmujemy

$$\int_K Q(x, y) dy = B.$$

Funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ możemy uważać za składowe pola wektorowego

$$\vec{v}(x, y) = [P(x, y), Q(x, y)].$$

Jeżeli istnieją obie całki (3), (5), to ich sumę nazywamy *całką krzywoliniową po krzywej K pola wektorowego \vec{v}* i oznaczamy symbolem

$$(6) \quad \int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Mamy zatem

$$(7) \quad \int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S(P, \Pi_n, \tau(\Pi_n)) + \tilde{S}(Q, \Pi_n, \tau(\Pi_n)) \right),$$

gdzie $\{\Pi_n\}$ jest dowolnie obranym ciągiem normalnym podziałów przedziału $[a, b]$, zaś punkty pośrednie $\tau(\Pi_n)$ są dowolnie ustalone.

Załóżmy teraz, że krzywa K ma opis parametryczny (1), w którym funkcje $x(t), y(t)$ są klasy C^1 w przedziale $[a, b]$ (mówimy krótko, że opis parametryczny (1) jest klasy C^1). Okażemy, że wówczas istnieje każda z całek (3), (5), (6).

Zacniemy od całki (3). Sumę przybliżoną (2) możemy przekształcić stosując twierdzenie o wartości średniej. Mamy bowiem

$$\Delta x_j = \dot{x}(\bar{\tau}_j) \Delta t_j,$$

gdzie

$$\Delta t_j = t_j - t_{j-1}, \quad \bar{\tau}_j \in (t_{j-1}, t_j)$$

i stąd

$$(8) \quad S(P, \Pi, \tau(\Pi)) = \sum_{j=1}^r P(x(\tau_j), y(\tau_j)) \dot{x}(\bar{\tau}_j) \Delta t_j.$$

Zauważmy, że w przypadku gdy

$$(9) \quad \tau_j = \bar{\tau}_j,$$

wyrażenie po prawej stronie (8) jest sumą przybliżoną

$$T(P, \Pi, \tau(\Pi)) = \sum_{j=1}^r P(x(\tau_j), y(\tau_j)) \dot{x}(\tau_j) \Delta t_j$$

całki

$$(10) \quad \int_a^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt.$$

Oczywiście równość (9) naogół nie zachodzi, gdyż liczby τ_j były dowolnie obrane, natomiast liczby $\bar{\tau}_j$ są narzucone przez twierdzenie o wartości średniej. Łatwo jednak okazać, że sumy S i T różnią się mało, jeżeli podział Π ma dostatecznie małą średnicę. Istotnie, uwzględniając (8) dostajemy

$$(11) \quad |S(P, \Pi, \tau(\Pi)) - T(P, \Pi, \tau(\Pi))| \leq \sum_{j=1}^r |P(x(\tau_j), y(\tau_j))| |\dot{x}(\bar{\tau}_j) - \dot{x}(\tau_j)| \Delta t_j.$$

Funkcja złożona $P(x(t), y(t))$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$, jest więc w tym przedziale ograniczona. Istnieje zatem liczba $M > 0$ taka, że

$$(12) \quad |P(x(t), y(t))| \leq M \quad \text{dla } t \in [a, b],$$

natomiast z jednostajnej ciągłości pochodnej $\dot{x}(t)$ w przedziale $[a, b]$ wynika, że do dowolnie obranej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by

$$(13) \quad |\dot{x}(\bar{\tau}_j) - \dot{x}(\tau_j)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \quad (j = 1, 2, \dots, r)$$

jeżeli

$$|\bar{\tau}_j - \tau_j| < \delta.$$

Z (11), (12), (13) dostajemy oszacowanie

$$|S(P, \Pi, \tau(\Pi)) - T(P, \Pi, \tau(\Pi))| < \varepsilon$$

o ile $d(\Pi) < \delta$. Jeżeli wobec tego $\{\Pi_n\}$ jest dowolnie obranym ciągiem normalnym podziałów, to do dowolnie obranej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać N tak, by dla $n > N$ zachodziła nierówność

$$|S(P, \Pi_n, \tau(\Pi_n)) - T(P, \Pi_n, \tau(\Pi_n))| < \varepsilon$$

a to oznacza, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(P, \Pi_n, \tau(\Pi_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(P, \Pi_n, \tau(\Pi_n))$$

czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(P, \Pi_n, \tau(\Pi_n)) = \int_a^b P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) dt.$$

Podobne rozumowanie zastosowane do sumy przybliżonej (4) daje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}(Q, \Pi_n, \tau(\Pi_n)) = \int_a^b Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t) dt$$

dla dowolnie obranego ciągu normalnego podziałów $\{\Pi_n\}$ i dowolnie obranych punktów pośrednich $\tau(\Pi_n)$. Doszliśmy w ten sposób do twierdzenia:

Twierdzenie 1. Niech K będzie krzywą mającą opis parametryczny (1) klasy C^1 i niech

$$\vec{v}(x, y) = [P(x, y), Q(x, y)]$$

będzie polem wektorowym o składowych określonych i ciągłych na krzywej K . Wówczas całka (6) istnieje i zachodzi równość

$$(14) \quad \int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x(t), y(t))\dot{x} + Q(x(t), y(t))\dot{y}) dt.$$

Twierdzenie 1 podaje metodę rachunkową pozwalającą sprowadzić obliczanie całki krzywoliniowej do całkowania funkcji jednej zmiennej. Zilustrujemy je przykładami.

Przykład 1. Punkty $(0, 0)$, $(1, 1)$ łączymy

a.) odcinkiem K_1 prostej $y = x$,

b.) częścią K_2 paraboli $y = x^2$.

Obliczymy całki krzywoliniowe po krzywych K_1 , K_2 pola wektorowego

$$\vec{v} = [2xy, x^2].$$

a.) Odcinek K_1 ma przedstawienie parametryczne klasy C^1

$$x = t, \quad y = t, \quad (0 \leq t \leq 1),$$

zatem

$$\dot{x} = \dot{y} = 1$$

i stąd po zastosowaniu (14)

$$\int_{K_1} 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 3t^2 dt = 1.$$

b.) Krzywa K_2 ma przedstawienie parametryczne klasy C^1

$$x = t, \quad y = t^2, \quad (0 \leq t \leq 1),$$

zatem

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 2t$$

i wobec (14) dostajemy

$$\int_{K_2} 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 4t^3 dt = 1.$$

Przykład 2. Niech K_1 , K_2 będą krzywymi rozważanymi w Przykładzie 7 i niech

$$\vec{v} = [xy, y - x].$$

Stosując regułę (14) dostajemy

$$\int_{K_1} xy \, dx + (y - x) \, dy = \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{1}{3}$$

oraz

$$\int_{K_2} xy \, dx + (y - x) \, dy = \int_0^1 (3t^3 - 2t^2) \, dt = \frac{1}{12}.$$

Uwaga. Jeżeli krzywa K jest odcinkiem równoległym do osi y -ów, to funkcja $x(t)$ w opisie parametrycznym (1) jest stała i wobec tego dla dowolnego podziału Π mamy $\Delta x_j = 0$ ($j = 1, \dots, r$) a więc również $S(P, \Pi, \tau(\Pi)) = 0$. Wynika stąd, że całka (3) istnieje i jest równa zero, co można zapisać w postaci równości

$$\int_{x=\text{const}} P(x, y) \, dx = 0.$$

Zamieniając role zmiennych x, y stwierdzamy podobnie, że

$$\int_{y=\text{const}} Q(x, y) \, dy = 0.$$

Obliczając całkę krzywoliniową w oparciu o regułę (14) korzystamy z opisu parametrycznego krzywej K . Powstaje pytanie, jak zmieni się całka, jeżeli do jej obliczenia użyjemy innego opisu parametrycznego, wprowadzając we wzorach (1) nowy parametr s przy pomocy podstawienia $t = t(s)$. Równania (1) przyjmują teraz postać

$$(1') \quad x = x(t(s)), \quad y = y(t(s)).$$

Założymy, że funkcja $t(s)$ jest ściśle monotoniczna i klasy C^1 .

Dla uproszczenia zapisu zajmiemy się najpierw całką (3). Wprowadzając oznaczenie

$$(t) \int_K, \quad (s) \int_K$$

dla całki krzywoliniowej obliczanej przy użyciu parametru t względnie parametru s i przyjmując $Q(x, y) = 0$ we wzorze (14) mamy

$$(15) \quad (t) \int_K P(x, y) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt,$$

gdzie

$$f(t) = P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}.$$

Do całki po prawej stronie stosujemy regułę całkowania przez podstawienie

$$\int_a^b f(t) dt = \int_A^B f(t(s)) \frac{dt}{ds} ds,$$

gdzie $a = t(A)$, $b = t(B)$. Wobec tego, po wykorzystaniu reguły różniczkowania funkcji złożonej

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$$

wzór (15) przyjmuje postać

$$(16) \quad (t) \int_K P(x, y) dx = \int_A^B P(x(t(s)), y(t(s))) \frac{dx}{ds} ds.$$

Jeżeli funkcja $t(s)$ jest ściśle rosnąca, to zachodzi nierówność $A < B$. W opisie parametrycznym (1') mamy wówczas $A \leq s \leq B$ i wzór (16) można zapisać w postaci

$$(17) \quad (t) \int_K P(x, y) dx = (s) \int_K P(x, y) dx.$$

Jeżeli natomiast funkcja $t(s)$ jest ściśle malejąca, to mamy $A > B$. Opis parametryczny (1') należy wówczas uzupełnić nierównością $B \leq s \leq A$ i ze wzoru (16) wynika, że

$$(18) \quad (t) \int_K P(x, y) dx = -(s) \int_K P(x, y) dx$$

Przeprowadzając podobny rachunek dla całki (5) dostajemy analogiczne równości

$$(17') \quad (t) \int_K Q(x, y) dy = (s) \int_K Q(x, y) dy,$$

gdy funkcja $t(s)$ jest ściśle rosnąca oraz

$$(18') \quad (t) \int_K Q(x, y) dy = -(s) \int_K Q(x, y) dy,$$

gdy funkcja $t(s)$ jest ściśle malejąca.

Jak wiemy, opis parametryczny wyznacza kierunek, w jakim punkt porusza się po krzywej wraz ze wzrostem parametru, czyli orientację krzywej. Jeżeli funkcja $t(s)$ jest ściśle rosnąca, to oba opisy (1) i (1') wyznaczają tę samą orientację krzywej K . Jeżeli natomiast funkcja $t(s)$ jest ściśle malejąca, to opis (1') wyznacza orientację przeciwną do tej, jaką nadaje krzywej K opis (1); krzywą z orientacją nadaną jej przez opis (1') oznaczamy wówczas przez $-K$. Równości (18) i (18') można przy użyciu tej symboliki zapisać w postaci

$$\int_K P(x, y) dx = - \int_{-K} P(x, y) dx, \quad \int_K Q(x, y) dy = - \int_{-K} Q(x, y) dy,$$

skąd wynika

$$(19) \quad \int_{-K} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Wynik przeprowadzonych rachunków sformułujemy w postaci twierdzenia

Twierdzenie 2. Załóżmy, że w opisie parametrycznym (1) klasy C^1 krzywej K wprowadzamy nowy parametr przy pomocy podstawienia $t = t(s)$, gdzie funkcja $t(s)$ jest ściśle monotoniczna i klasy C^1 . Wówczas

(i) jeżeli $t(s)$ jest ściśle rosnąca, to całka (6) nie ulega zmianie;

(ii) jeżeli $t(s)$ jest ściśle malejąca, to orientacja krzywej K zmienia się na przeciwną i zachodzi równość (19)

Przykład 3. Równania parametryczne

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

opisują okrąg K o środku w początku układu i promieniu jednostkowym zorientowany dodatnio względem wnętrza (oznacza to, obiegając okrąg zgodnie z orientacją mamy wnętrze koła po lewej stronie). Podstawienie

$$(20) \quad t = 2\pi - s_1$$

daje opis parametryczny tego okręgu

$$x = \cos(2\pi - s_1), \quad y = \sin(2\pi - s_1) \quad (0 \leq s_1 \leq 2\pi)$$

z orientacją przeciwną, natomiast podstawienie

$$(21) \quad t = 2s_2$$

prowadzące do opisu parametrycznego

$$x = \cos 2s_2, \quad y = \sin 2s_2 \quad (0 \leq s_2 \leq \pi)$$

zachowuje orientację. Ponieważ rozważane opisy okręgu K są klasy C^1 , możemy do każdego z nich zastosować regułę (14). Łatwy rachunek (proponujemy Czytelnikowi przeprowadzenie go) daje

$$(t) \int_K (-y) dx + x dy = (s_2) \int_K (-y) dx + x dy = 2\pi,$$

natomiast

$$(s_1) \int_{-K} (-y) dx + x dy = -2\pi$$

zgodnie z twierdzeniem 2.

Mówimy, że funkcja $f(t)$ jest *kawałkami klasy C^1* w przedziale $[a, b]$, jeżeli

(i) jest ciągła,

oraz

(ii) istnieje podział przedziału $[a, b]$

$$a = c_0 < c_1 < \dots < c_p = b$$

taki, że $f(t)$ jest klasy C^1 w każdym przedziale $[c_{j-1}, c_j]$ ($j = 1, \dots, p$).

Krzywą, która ma opis parametryczny (1) kawałkami klasy C^1 w przedziale $[a, b]$, będziemy nazywali *krzywą regularną*.

Niewielka modyfikacja przeprowadzonych poprzednio rozumowań pozwala udowodnić następujące odpowiedniki twierdzeń 1 i 2.

Twierdzenie 1'. Załóżmy, że krzywa K ma opis parametryczny (1) kawałkami klasy C^1 (jest zatem krzywą regularną) i niech

$$\vec{v}(x, y) = [P(x, y), Q(x, y)]$$

będzie polem wektorowym o składowych określonych i ciągłych na krzywej K . Wówczas całka (6) istnieje i zachodzi równość

$$(22) \quad \int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \sum_{j=1}^p \int_{c_{j-1}}^{c_j} (P(x(t), y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t)) dt$$

Twierdzenie 2'. Twierdzenie 2 pozostaje prawdziwe, jeżeli założymy, że K jest krzywą regularną.

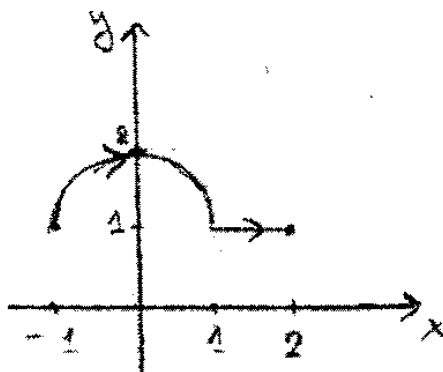
Przykład 4. Niech K będzie krzywą opisaną równaniami parametrycznymi

$$(23) \quad \begin{aligned} x &= -\cos t, & y &= 1 - \sin t & \text{dla } 0 \leq t \leq \pi, \\ x &= \frac{1}{\pi}t, & y &= 1 & \text{dla } \pi \leq t \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Funkcje $x(t)$, $y(t)$ określone równaniami (23) są ciągłe w przedziale $[0, 2\pi]$, ponadto różniczkując (23) dostajemy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sin t, & \dot{y} &= -\cos t & \text{dla } 0 \leq t \leq \pi, \\ \dot{x} &= \frac{1}{\pi}, & \dot{y} &= 0 & \text{dla } \pi \leq t \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Funkcje $x(t)$, $y(t)$ są klasy C^1 w każdym z przedziałów $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$, zatem opis parametryczny (23) krzywej K jest kawałkami klasy C^1 . K jest więc krzywą regularną. Dla $t \in [0, \pi]$ oraz $t \in [\pi, 2\pi]$ równania (23) opisują odpowiednio połowę okręgu i odcinek prostej równoległej do osi x -ów (por. rys. 30). Styczna do krzywej K istnieje w każdym punkcie odpowiadającym wartości parametru $t \in [0, \pi)$ oraz $t \in (\pi, 2\pi]$, natomiast dla $t = \pi$ krzywa nie posiada stycznej.



[rys. 30]

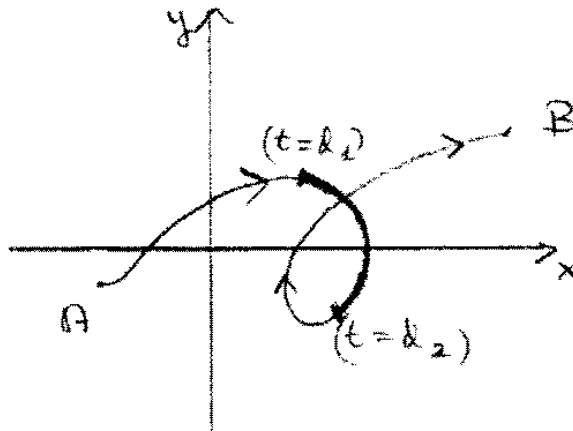
Rozważmy teraz podział przedziału $[a, b]$

$$a = d_0 < d_1 < \dots < d_s = b$$

i niech K_j oznacza krzywą opisaną równaniami parametrycznymi (1) dla $d_{j-1} \leq t \leq d_j$ ($j = 1, \dots, s$). Mamy wówczas

$$(24) \quad K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_s,$$

przy czym koniec krzywej K_j jest początkiem krzywej K_{j+1} ($j = 1, \dots, s-1$) - mówimy, że krzywa K ma *rozkład rozłączny* (24) (por. rys.31, na którym $s = 3$; orientację krzywej K zaznaczono strzałkami, krzywa K_2 jest narysowana grubszą linią).



[rys. 31]

Opierając się na wzorze (22) oraz na twierdzeniu o podziale przedziału całkowania dla całki z funkcji jednej zmiennej otrzymujemy łatwo

Twierdzenie 3 (o podziale krzywej całkowania). *Załóżmy, że regularna krzywa K ma rozkład rozłączny (24). Jeżeli pole wektorowe*

$$\vec{v}(x, y) = [P(x, y), Q(x, y)]$$

ma składowe określone i ciągłe na krzywej K , to

$$\int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \sum_{j=1}^s \int_{K_j} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Aby omówić interpretację fizyczną całki krzywoliniowej przypomniemy pewne wiadomości z mechaniki.

Niech $\vec{v} = [P, Q]$ będzie wektorem siły, której punkt przyłożenia leży na prostej l wyznaczonej przez wektor $\vec{d} = [\alpha, \beta]$ i ulega przesunięciu o ten wektor. Mówimy wówczas, że

siła \vec{v} wykonuje pracę na drodze \vec{d} . Jeżeli wektory \vec{v}, \vec{d} są równoległe, to wielkość L tej pracy wyraża się jako

$$(25') \quad L = |\vec{v}| |\vec{d}|$$

gdy wektory \vec{v}, \vec{d} mają ten sam zwrot oraz

$$(25'') \quad L = -|\vec{v}| |\vec{d}|$$

gdy wektory \vec{v}, \vec{d} mają zwrot przeciwny. W ogólnym przypadku określamy pracę wzorem (25') lub (25'') z zastąpieniem wektora \vec{v} przez jego rzut prostopadły na prostą l . Prowadzi to do równości

$$(26) \quad L = |\vec{v}| |\vec{d}| \cos \theta,$$

gdzie $\theta \in [0, \pi]$ jest kątem między wektorami \vec{v}, \vec{d} (proste sprawdzenie pozostawiamy Czytelnikowi). Wyrażenie po prawej stronie (26) można wyrazić przy pomocy współrzędnych wektorów \vec{v}, \vec{d} . Oznaczając bowiem przez ϕ, ψ kąty utworzone przez wektory \vec{v}, \vec{d} z dodatnią półosią x -ów mamy $\theta = \phi - \psi$ lub $\theta = \psi - \phi$ oraz

$$\begin{aligned} P &= |\vec{v}| \cos \phi, & Q &= |\vec{v}| \sin \phi, \\ \alpha &= |\vec{d}| \cos \psi, & \beta &= |\vec{d}| \sin \psi \end{aligned}$$

i stąd po prostym rachunku

$$|\vec{v}| |\vec{d}| \cos \theta = P\alpha + Q\beta.$$

Zatem (por. rozdz. II punkt 5) prawa strona (26) jest iloczynem skalarnym wektora siły i wektora przesunięcia, wzór (26) określający pracę można wobec tego zapisać w postaci

$$(27) \quad L = (\vec{v}, \vec{d}).$$

Zgodnie ze wzorem (7) całka krzywoliniowa (6) jest granicą ciągu sum przybliżonych S_n , które przy ustalonym n można zapisać w postaci

$$S = \sum_{j=1}^r \left(P(x(\tau_j), y(\tau_j)) \Delta x_j + Q(x(\tau_j), y(\tau_j)) \Delta y_j \right)$$

(dla uproszczenia oznaczeń opuszczamy wskaźnik n). Zauważmy, że j -ty składnik sumy S jest iloczynem skalarnym (\vec{v}_j, \vec{d}_j) , gdzie

$$\vec{v}_j = [P(x(\tau_j), y(\tau_j)), Q(x(\tau_j), y(\tau_j))], \quad \vec{d}_j = [\Delta x_j, \Delta y_j],$$

zatem zgodnie z (27) wyraża on pracę wykonaną przez siłę \vec{v}_j na drodze \vec{d}_j , zaś suma S jest równa pracy wykonanej przez siły \vec{v}_j na drodze utworzonej z wektorów \vec{d}_j , która

jest łamaną o wierzchołkach $(x(t_j), y(t_j))$ ($j = 0, 1, \dots, r$). Przechodząc do granicy przy $n \rightarrow \infty$ możemy wobec tego uważać, że całka krzywoliniowa (6) wyraża pracę L wykonaną przez siły pola $\vec{v}(x, y) = [P(x, y), Q(x, y)]$ na drodze będącej krzywą K . Mamy więc

$$(28) \quad L = \int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Przykład 5. Rozważając mały obszar powierzchni ziemi (który możemy uważać za część płaszczyzny) obierzmy prostokątny układ współrzędnych tak, by powierzchnia ziemi leżała w płaszczyźnie xz i oś y -ów była skierowana ku górze. Siła ciężkości działająca na punkt materialny o masie m może być w takim układzie zapisana jako wektor $[0, -mg, 0]$. W mechanice dowodzi się, że ruch punktu materialnego pod działaniem siły ciężkości jest ruchem płaskim. Możemy wobec tego założyć, że odbywa się on w płaszczyźnie xy i jako wektor pola grawitacyjnego przyjąć $\vec{v} = [0, -mg]$. Obliczymy pracę L wykonaną przez siły tego pola, gdy punkt materialny przemieszcza się z punktu $A = (x_A, y_A)$ do punktu $B = (x_B, y_B)$. Oznaczając przez K krzywą, po której porusza się punkt, mamy zgodnie z (28)

$$L = - \int_K mg dy.$$

Aby obliczyć całkę po prawej stronie możemy zastosować wzór (14) przy dodatkowym założeniu, że K ma opis parametryczny (1) klasy C^1 . Można jednak postąpić prościej wychodząc bezpośrednio z definicji całki (5), co daje

$$(29) \quad L = -mg \int_K dy = mg(y_A - y_B).$$

Z równości (29) widać, że praca L wykonana przez siły pola grawitacyjnego nie zależy od kształtu drogi K a jedynie od punktu początkowego A i punktu końcowego B (zauważmy, że ruch punktu nie musi być pionowym spadaniem, może on również poruszać się po jakiejś powierzchni na tyle gładkiej, by można było nie uwzględniać siły tarcia). Dokładniej - praca L zależy tylko od różnicy poziomów punktów A, B . Jest przy tym dodatnia, gdy $y_A > y_B$ (punkt spada) i ujemna, gdy $y_A < y_B$ (punkt jest podnoszony z niższego poziomu na wyższy - wymaga to wykonania pracy dodatniej i równej co do wartości bezwzględnej pracy L).

Przykład 6. Zgodnie z prawem Coulomba dwa punktowe ładunki elektryczne e, e_1 działają na siebie z siłą \vec{F} skierowaną wzdłuż łączącej je prostej, przy czym wielkość tej siły jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu ich odległości. Obierzmy prostokątny układ współrzędnych w taki sposób, aby oba ładunki leżały w płaszczyźnie xy i założmy, że ładunek e jest umieszczony w początku układu zaś ładunek e_1 w punkcie $p = (x, y) \neq (0, 0)$. Przy odpowiednim obiorze jednostki, w której mierzymy wielkość ładunku, siła \vec{F} wyraża się wówczas wzorem

$$(30) \quad \vec{F} = \frac{\vec{r}}{r} \frac{ee_1}{r^2},$$

gdzie

$$\vec{r} = \vec{0p} = [x, y], \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Z (30) widać, że

(i) gdy $ee_1 > 0$ (ładunki są jednakowego znaku), siła \vec{F} ma zwrot zgodny ze zwrotem wektora \vec{r} , zatem ładunki odpychają się;

(ii) gdy $ee_1 < 0$ (ładunki są różnych znaków), siła \vec{F} ma zwrot przeciwny do zwrotu wektora \vec{r} , zatem ładunki przyciągają się;

(iii) jeżeli e_1 jest dodatnim ładunkiem jednostkowym ($e_1 = 1$), to ładunek e działa na niego siłą

$$(31) \quad \vec{v} = \frac{\vec{r}}{r} \frac{e}{r^2}, \quad (r \neq 0);$$

mówimy, że ładunek e wytwarza *pole elektryczne* \vec{v} określone wzorem (31) w całej płaszczyźnie za wyjątkiem początku układu.

Obliczymy pracę wykonaną przez siły pola \vec{v} , gdy umieszczony w polu dodatni jednostkowy ładunek próbny przemieszcza się z punktu A do punktu B . Mamy

$$\vec{v} = e \left[\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3} \right],$$

zatem zgodnie z (28)

$$L = e \int_{K_{AB}} \frac{x}{r^3} dx + \frac{y}{r^3} dy,$$

jeżeli przez K_{AB} oznaczymy krzywą o początku w punkcie A i końcu w punkcie B , nie przechodzącą przez początek układu współrzędnych. Przy założeniu, że krzywa ta ma opis parametryczny (1) klasy C^1 możemy do obliczenia całki krzywoliniowej zastosować twierdzenie 1, co daje

$$L = e \int_a^b \left(\frac{x}{r^3} \dot{x} + \frac{y}{r^3} \dot{y} \right) dt.$$

Zauważmy, że stosując regułę różniczkowania funkcji złożonej dostajemy

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{r(t)} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial r}{\partial y} \dot{y} \right)$$

czyli

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{r(t)} = -\frac{1}{r^3} (x\dot{x} + y\dot{y})$$

wobec czego

$$L = -e \int_a^b \frac{d}{dt} \frac{1}{r(t)} dt = e \left(\frac{1}{r(a)} - \frac{1}{r(b)} \right).$$

Otrzymany wynik możemy zapisać w postaci

$$L = e \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right),$$

gdzie r_A, r_B oznaczają odległość punktów A, B od początku układu. Jeżeli ładunek e jest dodatni, to praca L jest dodatnia, gdy $r_A < r_B$ (ładunek próbny oddala się od początku układu) zaś ujemna, gdy $r_A > r_B$ (ładunek próbny zbliża się do początku układu - wówczas przemieszczenie go wymaga wykonania pracy dodatniej równej co do wartości bezwzględnej pracy L). W przypadku pola \vec{v} wytworzonego przez ujemny ładunek e mamy sytuację odwrotną - praca L jest dodatnia, gdy $r_A > r_B$ (ładunek próbny zbliża się do początku układu) zaś ujemna, gdy $r_A < r_B$ (ładunek próbny oddala się od początku układu).

2. Zastosowanie całki krzywoliniowej do obliczania pola i twierdzenie Greena.

Załóżmy, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ jest obszarem domkniętym ograniczonym krzywą K . Mówimy, że krzywa K jest zorientowana dodatnio względem obszaru \mathbb{D} , jeżeli poruszając się po krzywej K zgodnie z jej orientacją mamy obszar \mathbb{D} po lewej stronie. Jeżeli K ma orientację przeciwną (tzn. poruszając się po krzywej K zgodnie z jej orientacją mamy obszar \mathbb{D} po prawej stronie) to mówimy że krzywa K jest zorientowana ujemnie względem obszaru \mathbb{D} .

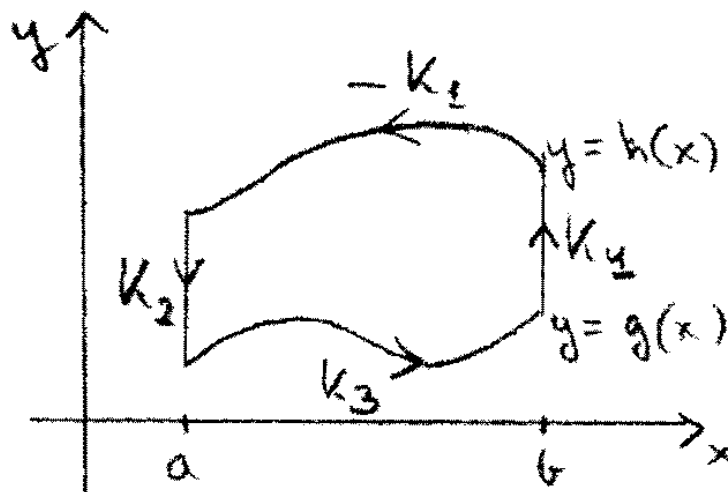
Niech teraz \mathbb{D} będzie obszarem domkniętym normalnym względem osi x -ów, a więc opisanym nierównościami

$$(32) \quad a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq h(x),$$

przy czym o funkcjach g, h założymy, że są klasy C^1 w przedziale $[a, b]$ oraz że $g(x) < h(x)$ dla $x \in (a, b)$ (por. punkt 4 rozdz. V). Oznaczmy przez K krzywą ograniczającą obszar \mathbb{D} , zorientowaną dodatnio względem tego obszaru, wówczas K ma rozkład rozłączny (por. punkt 1)

$$(33) \quad K = (-K_1) \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4,$$

jeżeli przez K_1, K_3 oznaczymy odpowiednio wykresy funkcji $h(x), g(x)$ zorientowane w kierunku rosnącej współrzędnej x zaś przez K_2, K_4 odcinki prostych $x = a, x = b$ (rys. 32).



[rys. 32]

Krzywe K_1, K_3 są określone równaniami

$$(34) \quad y = h(x), \quad y = g(x), \quad (a \leq x \leq b),$$

z których otrzymujemy ich opis parametryczny klasy C^1

$$(35) \quad K_1 : \quad x = t, \quad y = h(t), \quad (a \leq t \leq b)$$

oraz

$$(36) \quad K_2 : \quad x = t, \quad y = g(t), \quad (a \leq t \leq b).$$

Z równań (34) łatwo otrzymać opis parametryczny krzywej K w postaci

$$(37) \quad \begin{aligned} x &= -\tau, & y &= h(-\tau) & \text{dla} & -b \leq \tau \leq -a, \\ x &= a, & y &= (\tau + a)g(a) + (1 - \tau - a)h(a) & \text{dla} & -a < \tau < 1 - a, \\ x &= \tau + 2a - 1, & y &= g(\tau + 2a - 1) & \text{dla} & 1 - a \leq \tau \leq A, \\ x &= a, & y &= (\tau - A)h(b) + (1 - \tau + A)g(b) & \text{dla} & A < \tau \leq 1 + A, \end{aligned}$$

gdzie $A = 1 + b - 2a$. Jest to opis kawałkami klasy C^1 , zatem K jest krzywą regularną (proponujemy Czytelnikowi sprawdzenie, że $-b < 1 + A$ oraz że funkcje $x(\tau), y(\tau)$ są ciągłe w przedziale $[-b, 1 + A]$). Zgodnie z twierdzeniem 3 i rozkładem (33) dla dowolnej funkcji $P(x, y)$ określonej i ciągłej na K mamy

$$\int_K P dx = \int_{-K_1} P dx + \sum_{j=2}^4 \int_{K_j} P dx.$$

Ponieważ (por. Uwaga w punkcie 1)

$$\int_{K_2} P dx = \int_{K_4} P dx = 0,$$

ostatnia równość przyjmuje postać

$$(38) \quad \int_K P dx = \int_{-K_1} P dx + \int_{K_3} P dx.$$

Zauważmy, że kolejne wiersze (37) dają opis parametryczny krzywych $-K_1, K_2, K_3, K_4$. Korzystając z tego opisu wprowadzimy nowy parametr t przyjmując w pierwszym wierszu $t = -\tau$ i w trzecim wierszu $t = \tau + 2a - 1$, wówczas (por punkt 1)

$$(39) \quad \int_{-K_1} P dx = - \int_{K_1} P dx = - \int_a^b P(t, h(t)) dt$$

oraz

$$(40) \quad \int_{K_3} P dx = \int_a^b P(t, g(t)) dt$$

i stąd wobec (38), (39), (40)

$$(41) \quad \int_K P dx = - \int_a^b P(t, h(t)) dt + \int_a^b P(t, g(t)) dt.$$

Niech $ID \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem domkniętym. Mówimy, że funkcja $f(x, y)$ jest klasy C^1 w ID (zapisujemy: klasy $C^1(ID)$), jeżeli istnieje zbiór otwarty (por. rozdz. II punkt 2) $\Omega \supset ID$ taki, że f jest klasy C^1 w Ω .

Z przeprowadzonych rachunków wynika

Twierdzenie 4. Załóżmy, że

- (i) \mathbb{D} jest obszarem normalnym względem osi x -ów określonym nierównościami (32), przy czym funkcje g, h są klasy C^1 w przedziale $[a, b]$;
 - (ii) funkcja $P(x, y)$ jest klasy C^1 w obszarze \mathbb{D} ;
 - (iii) krzywa K ograniczająca obszar \mathbb{D} jest zorientowana dodatnio względem tego obszaru.
- Wówczas

$$-\iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_K P dx.$$

DOWÓD. Ponieważ pochodna występująca pod całką podwójną jest funkcją ciągłą w \mathbb{D} , możemy zastosować twierdzenie 8 rozdz. V, co daje

$$\iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b P(x, h(x)) dx - \int_a^b P(x, g(x)) dx$$

i stąd wobec (41) wynika teza. \square

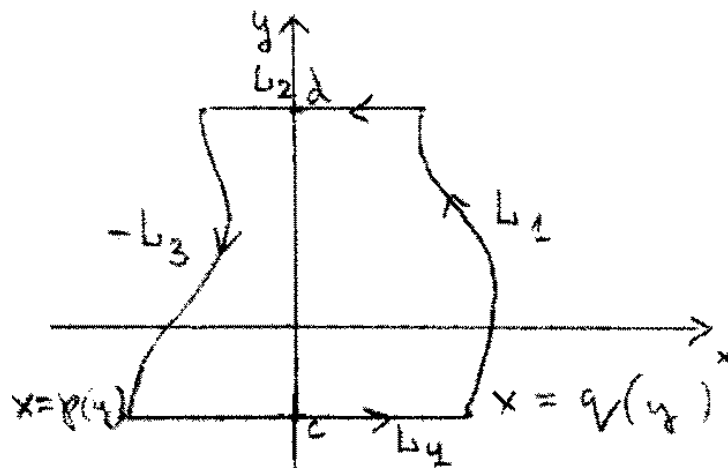
Założmy teraz, że \mathbb{D} jest obszarem domkniętym normalnym względem osi y -ów opisanym nierównościami

$$(42) \quad c \leq y \leq d, \quad p(y) \leq x \leq q(y),$$

przy czym o funkcjach p, q zakładamy, że są klasy C^1 w przedziale $[c, d]$ oraz że $p(y) < q(y)$ dla $y \in (c, d)$ i niech $Q(x, y)$ będzie funkcją klasy $C^1(\mathbb{D})$. Oznaczając przez K krzywą ograniczającą obszar \mathbb{D} zorientowaną dodatnio względem tego obszaru mamy teraz (rozkład rozłączny)

$$K = L_1 \cup L_2 \cup (-L_3) \cup L_4,$$

jeżeli przez L_1, L_3 oznaczymy odpowiednio wykresu funkcji $q(y), p(y)$ zorientowane w kierunku rosnącej współrzędnej y , zaś przez L_2, L_4 odcinki prostych $y = c, y = d$ (rys. 33).



[rys. 33]

Rozumując podobnie, jak w przypadku obszaru normalnego względem osi x -ów, dostajemy

$$(43) \quad \int_K Q \, dy = \int_{L_1} Q \, dy + \int_{-L_3} Q \, dy,$$

przy czym

$$(44) \quad \int_{L_1} Q \, dy = \int_c^d Q(q(t), t) \, dt$$

oraz

$$(45) \quad \int_{-L_3} Q \, dy = - \int_c^d Q(q(t), t) \, dt$$

(proponujemy Czytelnikowi przeprowadzenie szczegółowych rachunków). Otrzymujemy w ten sposób

Twierdzenie 5. *Założmy, że*

- (i) \mathbb{D} *jest obszarem normalnym względem osi y -ów określonym nierównościami (42), przy czym funkcje p, q są klasy C^1 w przedziale $[c, d]$;*
- (ii) *funkcja $Q(x, y)$ jest klasy C^1 w \mathbb{D} ;*
- (iii) *krzywa K ograniczająca obszar \mathbb{D} jest zorientowana dodatnio względem tego obszaru.*

Wówczas

$$\iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx \, dy = \int_K Q \, dy.$$

DOWÓD. Na mocy twierdzenia 8 rozdz. V mamy

$$\iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx \, dy = \int_c^d dy \int_{p(y)}^{q(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} \, dx = \int_c^d Q(q(y), y) \, dy - \int_c^d Q(p(y), y) \, dy$$

i stąd wobec (43), (44), (45) wynika teza. \square

Uwaga. Wszystkie poprzednie rozumowania można przeprowadzić zakładając jedynie, że funkcje g, h, p, q są kawałkami klasy C^1 w przedziale $[a, b]$ względnie $[c, d]$, zatem twierdzenia 4 i 5 pozostają prawdziwe przy tym założeniu.

Opierając się na twierdzeniu 4 i twierdzeniu 5 otrzymujemy

Twierdzenie 6 (Greena). *Niech $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem normalnym względem obu osi układu współrzędnych ograniczonym krzywą K regularną i zorientowaną dodatnio względem obszaru \mathbb{D} . Jeżeli $P(x, y), Q(x, y)$ są funkcjami klasy $C^1(\mathbb{D})$, to*

$$(46) \quad \iint_{\mathbb{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy = \int_K P \, dx + Q \, dy.$$

Niech

$$\vec{w}(x, y, z) = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)]$$

będzie polem wektorowym w przestrzeni \mathbb{R}^3 , przy czym o funkcjach P, Q, R zakładamy, że są klasy C^1 . *Rotacją pola* \vec{w} nazywamy wektor zapisany w postaci symbolicznego wyznacznika

$$(47) \quad \text{rot } \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i}, & \vec{j}, & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial z} \\ P, & Q, & R \end{vmatrix},$$

gdzie $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ oznaczają wersory osi układu współrzędnych a iloczyn operatora różniczkowania przez funkcję rozumiemy jako odpowiednią pochodną cząstkową. W przypadku pola płaskiego $\vec{v}(x, y) = [P(x, y), Q(x, y)]$ przyjmujemy $R = 0$ we wzorze (47) i wówczas rozwinięcie wyznacznika według pierwszego wiersza daje

$$\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Rotacja pola \vec{v} jest więc wektorem skierowanym wzdłuż osi z -ów, którego długość w punkcie (x, y) jest, z dokładnością do znaku, równa wyrażeniu podcałkowemu po lewej stronie (46). Przyjmując oznaczenia

$$\vec{r} = [x, y], \quad d\vec{r} = [dx, dy]$$

możemy wzór Greena (46) zapisać w postaci wektorowej

$$(46') \quad \iint_{\mathbb{D}} (\text{rot } \vec{v})_z dx dy = \int_K (\vec{v}, d\vec{r}),$$

gdzie zapis $(\vec{a})_z$ oznacza składową z wektora \vec{a} . Zapis ten ułatwia, być może, zapamiętanie wzoru Greena.

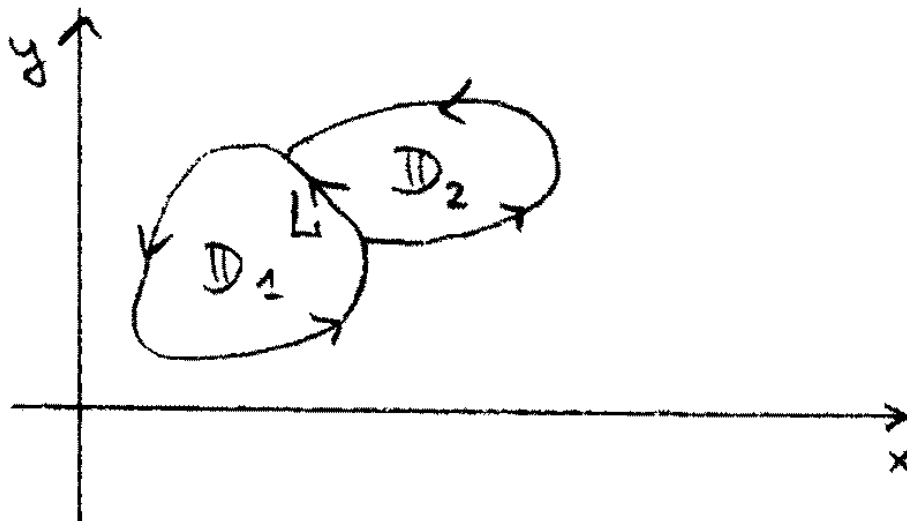
Twierdzenie 6 można uogólnić osłabiając założenia dotyczące obszaru \mathbb{D} . Będziemy mówili, że obszar domknięty \mathbb{D} jest σ -normalny, jeżeli daje się przedstawić w postaci sumy

$$(48) \quad \mathbb{D} = \cup_{j=1}^p \mathbb{D}_j,$$

gdzie obszary domknięte \mathbb{D}_j mają rozłączne wnętrza, przy czym obszar \mathbb{D}_j jest normalny względem obu osi układu współrzędnych i ograniczony regularną krzywą K_j ($j = 1, \dots, p$). Opierając się na twierdzeniu 10 rozdz. V i twierdzeniu 6 łatwo otrzymać

Twierdzenie 7 (Greena). *Niech \mathbb{D} będzie obszarem σ -normalnym ograniczonym krzywą K zorientowaną dodatnio względem tego obszaru. Jeżeli P, Q są funkcjami klasy $C^1(\mathbb{D})$, to zachodzi równość (46).*

DOWÓD. Dla uproszczenia przeprowadzimy dowód przyjmując $p = 2$ w rozkładzie (48) (rys. 34).



[rys. 34]

Założmy, że krzywa K_j ma dodatnią orientację względem obszaru \mathbb{D}_j , ($j = 1, 2$), wówczas

$$K_1 = (K \cap \mathbb{D}_1) \cup L, \quad K_2 = (K \cap \mathbb{D}_2) \cup (-L),$$

gdzie krzywa $L = K_1 \cap K_2$ jest zorientowana jak na rys. 34. Każdy z obszarów $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2$ spełnia założenia twierdzenia 6, zatem stosując wzór (46) i korzystając z twierdzenia 3 dostajemy

$$\iint_{\mathbb{D}_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{K \cap \mathbb{D}_1} P dx + Q dy + \int_L P dx + Q dy$$

oraz

$$\iint_{\mathbb{D}_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{K \cap \mathbb{D}_2} P dx + Q dy + \int_{-L} P dx + Q dy.$$

Po dodaniu stronami obu równości całki po krzywej L i $-L$ znoszą się zgodnie ze wzorem (19) i wobec tego w oparciu o twierdzenie 10 rozdz. V i twierdzenie 3 dostajemy tezę. \square

Z twierdzeń 4 i 5 wynikają następujące reguły rachunkowe pozwalające obliczyć pole obszaru:

Reguła 1. Przy założeniach twierdzenia 4

$$|\mathbb{D}| = - \int_K y dx.$$

Reguła 2. Przy założeniach twierdzenia 5

$$|\mathbb{D}| = \int_K x dy.$$

Reguła 3. Jeżeli spełnione są założenia twierdzeń 4 i 5, to

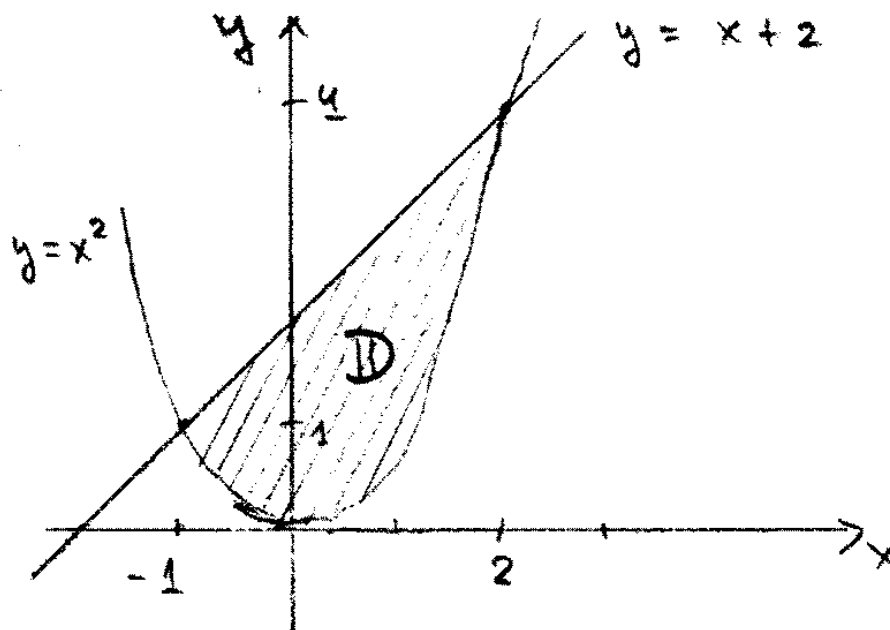
$$|\mathbb{D}| = \frac{1}{2} \int_K x dy - y dx.$$

DOWÓD. Dla dowodu wystarczy przyjąć $P(x, y) = -y$ oraz $Q(x, y) = x$ i skorzystać z równości

$$|\mathbb{D}| = \iint_{\mathbb{D}} dx dy$$

(por. punkt 4 rozdz. V).

Przykład 7. Obliczymy pole obszaru \mathbb{D} ograniczonego prostą $y = x + 2$ i parabolą $y = x^2$ (rys. 35).



[rys. 35]

Prosta i parabola przecinają się w punktach $(-1, 1)$ oraz $(2, 4)$, obszar \mathbb{D} jest zatem określony nierównościami

$$-1 \leq x \leq 2, \quad x^2 \leq y \leq x + 2.$$

Jest to obszar normalny względem osi x -ów, przy czym funkcje f, g są klasy C^1 w przedziale $[-1, 2]$, możemy więc zastosować regułę 1. Ponieważ krzywa K ma rozkład rozłączny

$$K = (-K_1) \cup K_2,$$

mamy zgodnie z twierdzeniem 3

$$(49) \quad \int_K y dx = - \int_{K_1} y dx + \int_{K_2} y dx.$$

Krzywa K_2 ma opis parametryczny

$$x = t, \quad y = t^2, \quad (-1 \leq t \leq 2)$$

zaś opis parametryczny K_1 ma postać

$$x = t, \quad y = t + 2, \quad (-1 \leq t \leq 2),$$

wobec tego stosując wzór (14) dostajemy z (49)

$$\int_K y \, dx = - \int_{-1}^2 (t + 2) \, dt + \int_{-1}^2 t^2 \, dt$$

a to po obliczeniu całek i zastosowaniu reguły 1 daje

$$|\mathbb{D}| = \frac{9}{2}.$$

Przykład 8. Obliczymy pole obszaru \mathbb{D} ograniczonego elipsą o równaniu

$$(50) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0).$$

Rozwiązując (50) względem y dostajemy

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (-a \leq x \leq a).$$

Obszar \mathbb{D} jest więc określony nierównościami

$$(51) \quad -a \leq x \leq a, \quad -b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

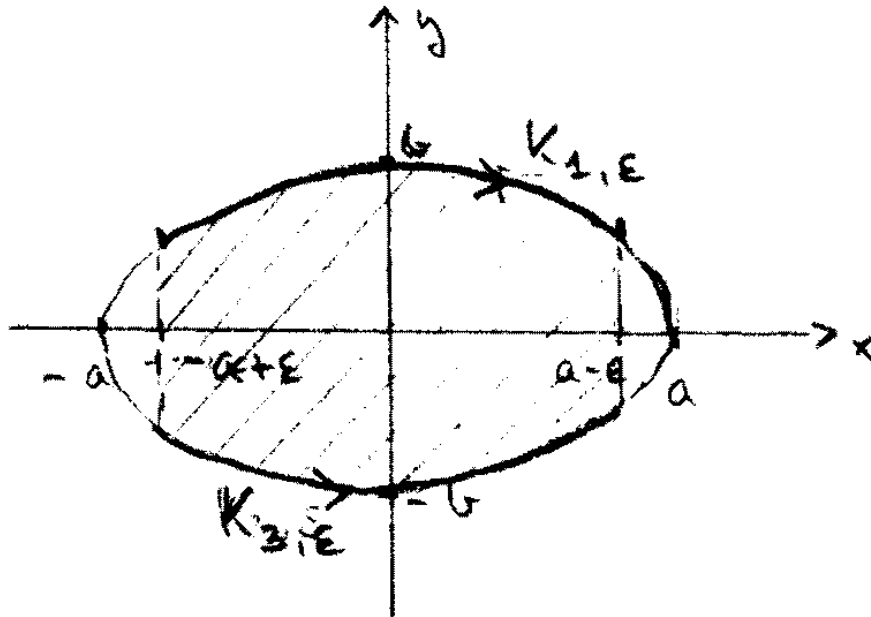
zatem jest to obszar normalny względem osi x -ów. Zauważmy jednak, że funkcje

$$g(x) = -b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad h(x) = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

nie są klasy C^1 w przedziale $[-a, a]$ (pochodna jest równa $\pm\infty$ na końcach przedziału), nie są więc spełnione założenia twierdzenia 4. Aby zastosować regułę 1 wyrazimy najpierw przy pomocy całki krzywoliniowej pole obszaru \mathbb{D}_ε określonego przez (51) z tym, że pierwsza nierówność zostaje zastąpiona przez nierówność

$$-a + \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$$

(por. rys.36, obszar \mathbb{D}_ε zakreskowany) a następnie przejdziemy do granicy przy $\varepsilon \rightarrow 0+$.



[rys. 36]

Oznaczając przez K_ε krzywą ograniczającą obszar ID_ε przy ustalonym $\varepsilon > 0$ mamy - por. (38)

$$(52) \quad |ID_\varepsilon| = - \int_{K_\varepsilon} y dx = - \int_{-K_{1,\varepsilon}} y dx - \int_{K_{3,\varepsilon}} y dx,$$

przy czym krzywe $K_{j,\varepsilon}$ ($j = 1, 3$) mają opis parametryczny

$$K_{1,\varepsilon}: \quad x = t, \quad y = b\sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}} \quad (-a + \varepsilon \leq t \leq a - \varepsilon)$$

oraz

$$K_{3,\varepsilon}: \quad x = t, \quad y = -b\sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}} \quad (-a + \varepsilon \leq t \leq a - \varepsilon).$$

Obliczenie całek krzywoliniowych we wzorze (52) będzie prostsze, jeżeli wprowadzimy nowy parametr u przyjmując

$$(53) \quad t = a \cos u.$$

Otrzymujemy w ten sposób nowy opis parametryczny

$$-K_{1,\varepsilon}: \quad x = a \cos u, \quad y = b \sin u, \quad (0 < u_\varepsilon \leq u \leq \pi - u_\varepsilon)$$

oraz

$$K_{3,\varepsilon}: \quad x = a \cos u, \quad y = b \sin u, \quad (\pi + u_\varepsilon \leq u \leq 2\pi - u_\varepsilon),$$

przy czym $u_\varepsilon \rightarrow 0$ gdy $\varepsilon \rightarrow 0+$ (zauważmy, że funkcja $\cos u$ jest ściśle malejąca w przedziale $[0, \pi]$ i ściśle rosnąca w przedziale $[\pi, 2\pi]$, wobec tego zgodnie z twierdzeniem 2 podstawienie (53) zmienia orientację krzywej $K_{1,\varepsilon}$ na przeciwną i zachowuje orientację krzywej $K_{3,\varepsilon}$). Opierając się na wzorze (14) dostajemy z (52)

$$(54) \quad |\mathbb{D}_\varepsilon| = ab \left(\int_{u_\varepsilon}^{\pi-u_\varepsilon} \sin^2 u \, du + \int_{\pi+u_\varepsilon}^{2\pi-u_\varepsilon} \sin^2 u \, du \right).$$

Podobne postępowanie można przeprowadzić zamieniając role zmiennych x, y . Rozwiązując równanie (50) względem x otrzymujemy

$$x = \pm a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Obszar \mathbb{D} można wobec tego określić nierównościami

$$(55) \quad -b \leq y \leq b, \quad -a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \leq x \leq a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}},$$

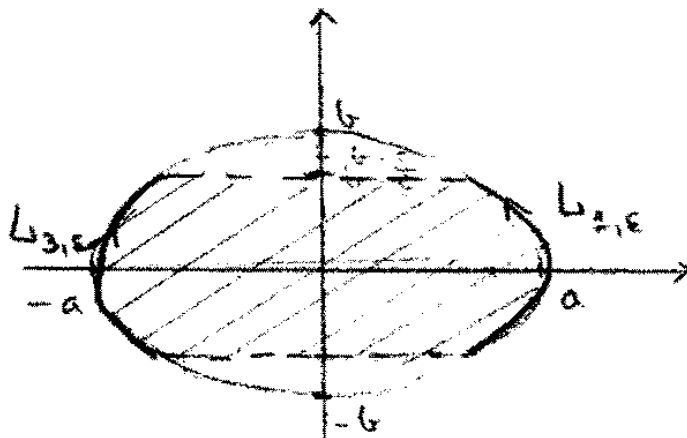
jest to więc obszar normalny względem osi y -ów. Jednak funkcje

$$p(y) = -a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, \quad q(y) = a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$$

nie są klasy C^1 w przedziale $[-b, b]$ i nie możemy zastosować reguły 2. Wyrazimy więc najpierw przy pomocy całki krzywoliniowej pole obszaru \mathbb{D}_ε^* określonego przez (55) z zastąpieniem pierwszej nierówności przez nierówność

$$-b + \varepsilon \leq y \leq b - \varepsilon$$

i następnie przejdziemy do granicy przy $\varepsilon \rightarrow 0+$ (rys. 37, obszar \mathbb{D}_ε^* zakreskowany).



[rys. 37]

Oznaczając przez K_ε^* krzywą ograniczającą obszar \mathbb{D}_ε^* mamy przy ustalonym $\varepsilon > 0$ (por. (43))

$$(56) \quad |\mathbb{D}_\varepsilon^*| = \int_{K_\varepsilon^*} x \, dy = \int_{L_{1,\varepsilon}} x \, dy + \int_{-L_{3,\varepsilon}} x \, dy,$$

przy czym krzywe $L_{j,\varepsilon}$ ($j = 1, 3$) mają opis parametryczny

$$L_{1,\varepsilon} : \quad x = a\sqrt{1 - \frac{t^2}{b^2}}, \quad y = t, \quad (-b + \varepsilon \leq t \leq b - \varepsilon)$$

oraz

$$L_{3,\varepsilon} : \quad x = -a\sqrt{1 - \frac{t^2}{b^2}}, \quad y = t, \quad (-b + \varepsilon \leq t \leq b - \varepsilon).$$

Wprowadzając nowy parametr v przy pomocy podstawienia

$$(57) \quad t = b \sin v$$

otrzymujemy nowy opis parametryczny

$$L_{1,\varepsilon} : \quad x = a \cos v, \quad y = b \sin v, \quad -\left(\frac{1}{2}\pi + v_\varepsilon \leq v \leq \frac{1}{2}\pi - v_\varepsilon\right)$$

oraz

$$-L_{3,\varepsilon} : \quad x = a \cos v, \quad y = b \sin v, \quad \left(\frac{1}{2}\pi + v_\varepsilon \leq v \leq \frac{3}{2}\pi - v_\varepsilon\right),$$

przy czym $v_\varepsilon \rightarrow 0$ gdy $\varepsilon \rightarrow 0+$ (zauważmy, że funkcja $\sin v$ jest ściśle rosnąca w przedziale $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ i ściśle malejąca w przedziale $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$, wobec tego zgodnie z twierdzeniem 2 podstawienie (57) zachowuje orientację krzywej $L_{1,\varepsilon}$ i zmienia orientację krzywej $L_{3,\varepsilon}$). Korzystając ze wzorów (14) i (56) dostajemy

$$(58) \quad |\mathbb{D}_\varepsilon^*| = ab \left(\int_{-\frac{1}{2}\pi + v_\varepsilon}^{\frac{1}{2}\pi - v_\varepsilon} \cos^2 v \, dv + \int_{\frac{1}{2}\pi + v_\varepsilon}^{\frac{3}{2}\pi - v_\varepsilon} \cos^2 v \, dv \right).$$

Po przejściu do granicy przy $\varepsilon \rightarrow 0+$ równości (54), (58) dają

$$2|\mathbb{D}| = ab \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 s \, ds + \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2 s \, ds \right).$$

Wobec okresowości funkcji podcałkowej można w drugiej całce jako przedział całkowania przyjąć $[0, 2\pi]$ i stąd

$$|\mathbb{D}| = \frac{1}{2}ab \int_0^{2\pi} (\sin^2 s + \cos^2 s) \, ds = \pi ab.$$

Gdy $a = b$, elipsa jest okręgiem i ostatnia równość daje znany wzór na pole koła.

3. Niezależność całki krzywoliniowej zorientowanej od drogi całkowania.

Całka krzywoliniowa

$$(59) \quad \int_K P dx + Q dy$$

wyraża pracę wykonaną przez siły pola $\vec{v} = [P, Q]$ na drodze K (por. punkt 1). Rozważając pole grawitacyjne w pobliżu powierzchni ziemi (Przykład 5) oraz pole elektryczne wytworzone przez punktowy ładunek (Przykład 6) zauważyliśmy, że praca w takim polu nie zależy od kształtu krzywej K a jedynie od jej punktu początkowego A i punktu końcowego B . Wobec tego przy ustalonych punktach A, B modyfikacja łączącej je drogi K nie zmienia pracy wykonanej przez siły pola na tej drodze. Mówimy, że pole wektorowe rozważane w przykładach 5, 6 jest *zachowawcze* (używany jest również termin *pole konserwatywne*). Przykładem pola wektorowego, które nie jest zachowawcze, jest pole wektorowe

$$\vec{v} = [xy, y - x]$$

rozważane w Przykładzie 2 - łącząc bowiem punkty $A = (0, 0)$ i $B = (1, 1)$ odcinkiem prostej $y = x$ oraz częścią paraboli $y = x^2$ otrzymujemy różne wartości całki krzywoliniowej.

W dalszym ciągu zajmiemy się zbadaniem warunków, przy których całka krzywoliniowa (59) zależy tylko od punktu początkowego A i końcowego B , nie zależy zaś od krzywej K łączącej te punkty - mówimy krótko, że *całka pola wektorowego $\vec{v} = [P, Q]$ nie zależy od drogi całkowania* (oznacza to, że *pole wektorowe \vec{v} jest zachowawcze*). Dla całki (59) używa się wówczas oznaczenia

$$\int_A^B P dx + Q dy.$$

Będziemy zakładali, że funkcje P, Q są ciągłe w pewnym obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ oraz że K jest krzywą regularną leżącą w Ω (por. punkt 1).

Mówimy, że krzywa K jest *krzywą zamkniętą* (lub *konturem*), jeżeli $A = B$. Zachodzi łatwe do udowodnienia

Twierdzenie 8. *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie dowolnym obszarem. Następujące warunki są równoważne:*

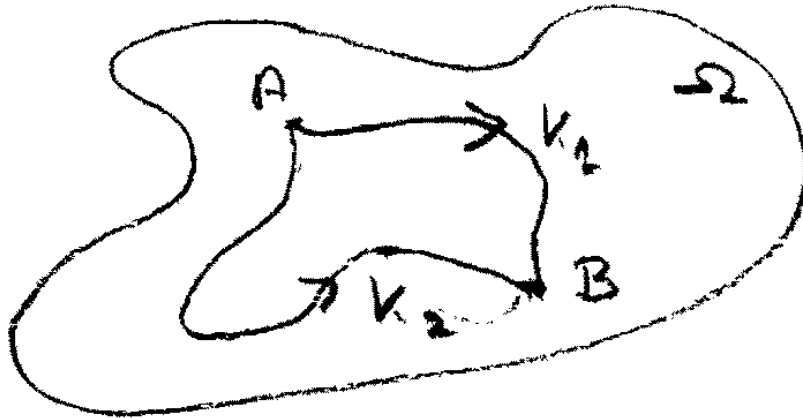
- (a) *całka pola wektorowego \vec{v} nie zależy od drogi całkowania w obszarze Ω ;*
- (b) *całka pola wektorowego \vec{v} po dowolnej krzywej zamkniętej leżącej w obszarze Ω jest równa zeru.*

DOWÓD. Niech K będzie dowolną krzywą zamkniętą leżącą w obszarze Ω , wówczas obierając na niej punkty A, B mamy (rys. 38) rozkład rozłączny

$$K = K_1 \cup (-K_2),$$

zatem (por. twierdzenie 3 i równość (19))

$$(60) \quad \int_K P dx + Q dy = \int_{K_1} P dx + Q dy - \int_{K_2} P dx + Q dy.$$



[rys. 38]

Z warunku (a) wynika, że obie całki po prawej stronie (60) są równe, co daje warunek (b). Aby udowodnić wynikanie przeciwne założymy, że punkty A, B na rys. 38 zostały dowolnie ustalone i że zostały połączone krzywymi K_1, K_2 leżącymi w obszarze Ω . Z warunku (b) wynika, że całka po lewej stronie (60) jest równa zero, zatem obie całki po prawej stronie są równe, co daje (a). \square

Mówimy, że *pole wektorowe* $\vec{v} = [P, Q]$ *jest potencjalne w obszarze* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, jeżeli istnieje funkcja $F(x, y)$ klasy $C^1(\Omega)$ (por. rozdz. II punkt 2) taka, że

$$(61) \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$$

dla $(x, y) \in \Omega$. Funkcję F nazywamy *potencjałem pola wektorowego* \vec{v} .

Twierdzenie 9. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie dowolnym obszarem. Następujące warunki są równoważne:

- (a) całka pola wektorowego \vec{v} nie zależy od drogi całkowania w obszarze Ω ;
- (b) pole \vec{v} jest potencjalne w obszarze Ω .

DOWÓD. Udowodnimy najpierw wynikanie (b) \implies (a) zakładając dla uproszczenia rachunków, że droga całkowania K ma opis parametryczny (1) klasy C^1 . Wobec równości (61) mamy

$$(62) \quad \int_K P dx + Q dy = \int_K \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy,$$

co po zastosowaniu wzoru (14) daje

$$\int_K P dx + Q dy = \int_a^b \left(F_x(x(t), y(t)) \dot{x} + F_y(x(t), y(t)) \dot{y} \right) dt$$

czyli po zastosowaniu reguły różniczkowania funkcji złożonej

$$\int_K P dx + Q dy = \int_a^b \frac{d}{dt} F(x(t), y(t)) dt.$$

Z ostatniej równości wynika, że

$$\int_K P dx + Q dy = F(x(b), y(b)) - F(x(a), y(a))$$

czyli

$$(63) \quad \int_k P dx + Q dy = F(B) - F(A).$$

Proponujemy Czytelnikowi przeprowadzenie podobnego rachunku w oparciu o wzór (22) przy założeniu, że K jest dowolną krzywą regularną.

Dowód wynikania (a) \implies (b) polega na skonstruowaniu potencjału pola \vec{v} . Ustalając punkt $(\alpha, \beta) \in \Omega$ przyjmiemy

$$(64) \quad F(u, v) = \int_{(\alpha, \beta)}^{(u, v)} P dx + Q dy.$$

Z założenia (a) wynika, że funkcja F jest dobrze określona w obszarze Ω . Okażemy, że jest ona potencjałem pola $\vec{v} = [P, Q]$. Dla ustalonego $(u_0, v_0) \in \Omega$ i dostatecznie małych przyrostów h, k mamy

$$(65) \quad F(u_0 + h, v_0 + k) = F(u_0, v_0) + \int_{(u_0, v_0)}^{(u_0 + h, v_0 + k)} P dx + Q dy,$$

przy czym jako drogę całkowania w drugim wyrazie po prawej stronie można przyjąć odcinek, którego opis parametryczny ma postać

$$x = u_0 + th, \quad y = v_0 + tk, \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Stosując regułę (14) możemy równość (65) zapisać w postaci

$$(66) \quad F(u_0 + h, v_0 + k) - F(u_0, v_0) = \int_0^1 \left(hP(u_0 + th, v_0 + tk) + kQ(u_0 + th, v_0 + tk) \right) dt,$$

skąd dla $k = 0, h \neq 0$ wynika

$$(67) \quad \frac{1}{h} \left(F(u_0 + h, v_0) - F(u_0, v_0) \right) = \int_0^1 P(u_0 + th, v_0) dt.$$

Oznaczając przez $L(h)$ lewą stronę (67) mamy zatem

$$(68) \quad |L(h) - P(u_o, v_o)| = \int_0^1 \left(P(u_o + th, v_o) - P(u_o, v_o) \right) dt.$$

Ponieważ z ciągłości funkcji P w punkcie (u_o, v_o) wynika, że do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla $|h| < \delta$, $0 \leq t \leq 1$ zachodziła nierówność

$$|P(u_o + th, v_o) - P(u_o, v_o)| < \varepsilon,$$

dostajemy z (68)

$$|L(h) - P(u_o, v_o)| < \varepsilon$$

dla $|h| < \delta$. Wobec tego

$$\lim_{h \rightarrow 0} L(h) = P(u_o, v_o)$$

a to oznacza, że pochodna $F_x(u_o, v_o)$ istnieje i zachodzi równość

$$F_x(u_o, v_o) = P(u_o, v_o).$$

Przyjmując $h = 0$, $k \neq 0$ w (66) dowodzimy w podobny sposób, że istnieje pochodna $F_y(u_o, v_o)$ i że zachodzi równość

$$F_y(u_o, v_o) = Q(u_o, v_o).$$

Ponieważ punkt (u_o, v_o) był dowolnie ustalony, mamy

$$(69) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

w całym obszarze Ω , przy czym pochodne cząstkowe w (69) są ciągłe i wobec tego funkcja $F(u, v)$ jest klasy $C^1(\Omega)$. Zatem funkcja F jest szukanym potencjałem pola \vec{v} . \square

Twierdzenia 8, 9 można krótko sformułować jako

Twierdzenie 10. *W dowolnym obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ następujące warunki są równoważne:*

- (i) *całka pola wektorowego \vec{v} nie zależy od drogi całkowania;*
- (ii) *całka pola wektorowego \vec{v} po dowolnej krzywej zamkniętej jest równa zeru;*
- (iii) *pole \vec{v} jest polem potencjalnym.*

Wzór (63) można uważać za analogiczny do znanej własności całki funkcji jednej zmiennej: dla dowolnej funkcji $g(t)$ ciągłej w przedziale $[a, b]$ mamy

$$\int_a^b g(t) dt = G(b) - G(a),$$

gdzie G jest dowolną pierwotną funkcji g , co oznacza, że spełniona jest równość

$$G'(t) = g(t).$$

Potencjał pola wektorowego stanowi więc odpowiednik funkcji pierwotnej i, podobnie jak ona, jest określony z dokładnością do stałej - wraz z funkcją $F(x, y)$ również funkcja

$$(70) \quad F_1(x, y) = F(x, y) + C$$

spełnia związki (61) a więc jest potencjałem tego samego pola \vec{v} . Obranie stałej C w (70) odpowiada ustaleniu punktu początkowego (α, β) w całce (64).

Przykład 9. W Przykładzie 6 było rozważane pole elektryczne wytworzone przez ładunek elektryczny e umieszczony w początku układu współrzędnych, określone wzorem

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}}{r} \frac{e}{r^2}, \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0).$$

Pole to jest potencjalne w obszarze $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, jako potencjał można przyjąć funkcję

$$F(x, y) = -\frac{e}{r}$$

(proste sprawdzenie warunków (61) pozostawiamy Czytelnikowi). Jak okazaliśmy, całka pola \vec{v} po krzywej $K_{A,B}$ łączącej punkty A, B jest równa

$$e \left(\frac{1}{r(A)} - \frac{1}{r(B)} \right),$$

zgodnie z ogólnym wzorem (63).

Wróćmy teraz do twierdzenia Greena (punkt 2) zakładając, że obszar \mathbb{D} jest kołem jednostkowym ograniczonym okręgiem K . Wprowadzając opis parametryczny okręgu K możemy prawą stronę (46) zapisać w postaci

$$\int_K P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} (P\dot{x} + Q\dot{y}) dt$$

czyli

$$\int_K P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} (\vec{v})_s(t) dt,$$

gdzie $(\vec{v})_s$ oznacza składową pola wektorowego $\vec{v} = [P, Q]$ styczną do K . Jeżeli wobec tego przyjmiemy, że \vec{v} jest polem prędkości cieczy płynącej w pewnym obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zawierającym koło \mathbb{D} , to całkę krzywoliniową po prawej stronie (46) można uważać za miarę zawirowania cieczy. Jeżeli funkcje P, Q są klasy $C^1(\Omega)$, to zgodnie z twierdzeniem Greena zawirowanie to jest określone przez wyrażenie pod całką podwójną po lewej stronie (46) równe, z dokładnością do znaku, długości wektora $\text{rot } \vec{v}$ (stąd pochodzi polska nazwa rotacji - *wirowość pola*). Jeżeli w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zachodzi równość

$$(71) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

to z (46) wynika, że dla dowolnego okręgu K ograniczającego koło jednostkowe $\mathbb{D} \subset \Omega$ mamy

$$\int_K P dx + Q dy = 0,$$

zatem płynąca ciecz nie tworzy wirów. W związku z tym mówimy, że pole wektorowe $\vec{v} = [P, Q]$ jest *bezwirowe w obszarze Ω* jeżeli jest klasy $C^1(\Omega)$ i spełnia w obszarze Ω warunek (71). Prosty rachunek pozwala udowodnić

Twierdzenie 11. Załóżmy, że pole wektorowe $\vec{v} = [P, Q]$ jest klasy $C^1(\Omega)$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jest dowolnie ustalonym obszarem. Jeżeli pole \vec{v} jest potencjalne w obszarze Ω , to jest ono bezwirowe w tym obszarze.

DOWÓD. Z założenia istnieje funkcja $F(x, y)$ klasy $C^1(\Omega)$ taka, że

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

w obszarze Ω . Wówczas

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)$$

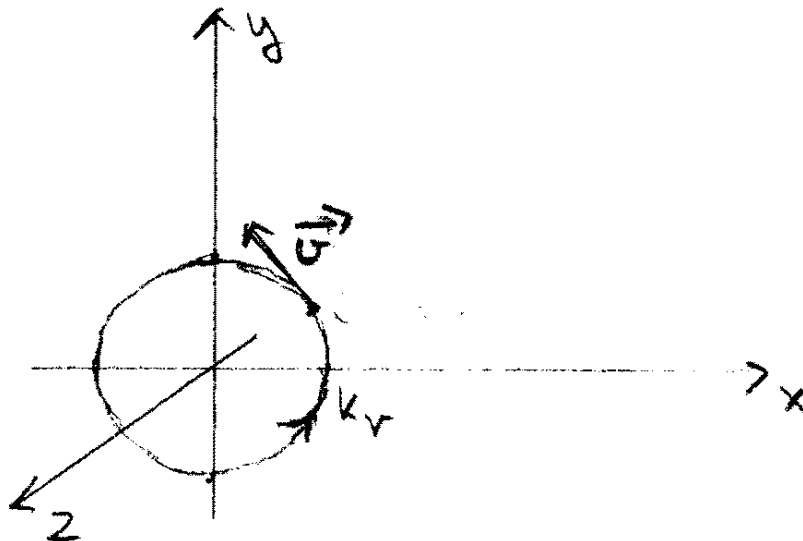
i równość (71) wynika z twierdzenia o pochodnych mieszanych (rozd. II twierdzenie 5).
□

Przykład 10. Przewodnik prostoliniowy, w którym płynie prąd elektryczny, wytwarza pole magnetyczne \vec{v} w płaszczyźnie prostopadłej do przewodnika (wektor \vec{v} określamy jako siłę działającą na dodatni biegun igły magnetycznej). Jeżeli obierzemy prostokątny układ współrzędnych w przestrzeni tak, by przewodnik leżał na osi z -ów, przy czym zwrot tej osi wyznacza kierunek prądu, to pole \vec{v} jest określone w płaszczyźnie xy , i przy tym

(i) natężenie $|\vec{v}(x, y)|$ pola w punkcie (x, y) jest odwrotnie proporcjonalne do odległości $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ od przewodnika,

(ii) wektor $\vec{v}(x, y)$ jest styczny do okręgu K_r o środku w początku układu i promieniu r ,

(iii) patrząc w kierunku osi z -ów widzimy obieg okręgu K_r wyznaczony przez zwrot wektora $\vec{v}(x, y)$ jako zgodny z zegarem (rys. 39).



[rys. 39]

Z warunków (i), (ii), (iii) wynika, że przy odpowiednim obiorze jednostek pole \vec{v} jest określone wzorem

$$\vec{v}(x, y) = \frac{1}{r} \left[\frac{-y}{r}, \frac{x}{r} \right], \quad (r \neq 0)$$

czyli

$$(72) \quad \vec{v}(x, y) = \frac{1}{r^2} [-y, x], \quad (r \neq 0).$$

Łatwy rachunek pozwala sprawdzić, że pole \vec{v} określone wzorem (72) jest bezwirowe w obszarze $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, mamy bowiem

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

i stąd przez różniczkowanie dostajemy (71). Okażemy, że pole to nie jest potencjalne. Istotnie, niech K_a będzie okręgiem o środku w początku układu i promieniu a . Opis parametryczny okręgu K_a zorientowanego zgodnie ze zwrotem wektora \vec{v} ma postać

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

zatem stosując wzór (14) dostajemy

$$\int_{K_a} P dx + Q dy = \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} \left((-a \sin t) \dot{x} + (a \cos t) \dot{y} \right) dt$$

czyli

$$(73) \quad \int_{K_a} P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi.$$

Ponieważ dla dowolnego $a > 0$

$$\int_{K_a} P dx + Q dy \neq 0,$$

z twierdzenia 10 wynika, że pole \vec{v} nie może być potencjalne w obszarze $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.

Z podanego przykładu widać, że twierdzenie odwrotne do twierdzenia 11 nie jest prawdziwe bez dodatkowych założeń dotyczących obszaru. Udowodnimy je w przypadku, gdy rozważany obszar jest przedziałem otwartym.

Twierdzenie 12. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie przedziałem otwartym określonym nierównościami

$$a < x < b, \quad c < y < d, \quad (a, c \geq -\infty; b, d \leq \infty).$$

Jeżeli pole wektorowe $\vec{v} = [P, Q]$ klasy $C^1(\Omega)$ jest bezwirowe w obszarze Ω to jest ono potencjalne w tym obszarze.

DOWÓD. Dowód polega na skonstruowaniu rozwiązania układu równań (61). Załóżmy, że funkcja $F(x, y)$ klasy $C^1(\Omega)$ jest rozwiązaniem tego układu i ustalmy $x_o \in (a, b)$, wówczas całkując pierwsze z równań (61) przy dowolnie ustalonym $y \in (c, d)$ dostajemy dla $x \in (a, b)$

$$(74) \quad F(x, y) = \int_{x_o}^x P(t, y) dt + g(y),$$

gdzie funkcja $g(y)$ jest stałą całkowania. Całka po prawej stronie (74) jest całką względem zmiennej t zależną od parametru y . W początkowym wykładzie analizy dowodzi się, że przy założeniach uczynionych o funkcji P całka ta ma pochodną względem y , którą obliczamy różniczkując pod znakiem całki. Z równości (74) wynika wobec tego, że również funkcja $g(y)$ ma pochodną. Różniczkując obustronnie (74) mamy zatem

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = \int_{x_o}^x \frac{\partial}{\partial y} P(t, y) dt + g'(y)$$

skąd w oparciu o (71) wynika

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = \int_{x_o}^x \frac{\partial}{\partial t} Q(t, y) dt + g'(y)$$

czyli

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = Q(x, y) - Q(x_o, y) + g'(y).$$

Wykorzystując drugie z równań (61) dostajemy stąd po redukcji

$$g'(y) = Q(x_o, y),$$

co po scałkowaniu względem y daje przy ustalonym $y_o \in (c, d)$

$$(75) \quad g(y) = \int_{y_o}^y Q(x_o, s) ds.$$

Z równości (74), (75) wynika, że jeżeli istnieje rozwiązanie układu (61), to przy ustalonych x_o, y_o ma ono postać

$$(76) \quad F(x, y) = \int_{x_o}^x P(t, y) dt + \int_{y_o}^y Q(x_o, s) ds.$$

Dla zakończenia dowodu należy sprawdzić, że funkcja $F(x, y)$ określona wzorem (76) rzeczywiście jest rozwiązaniem klasy C^1 układu (61) czyli szukanym potencjałem pola \vec{v} . Różniczkując (76) i wykorzystując założenia dotyczące funkcji P, Q dostajemy

$$(77) \quad \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = P(x, y)$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial y} P(t, y) dt + Q(x_0, y),$$

skąd po wykorzystaniu (71)

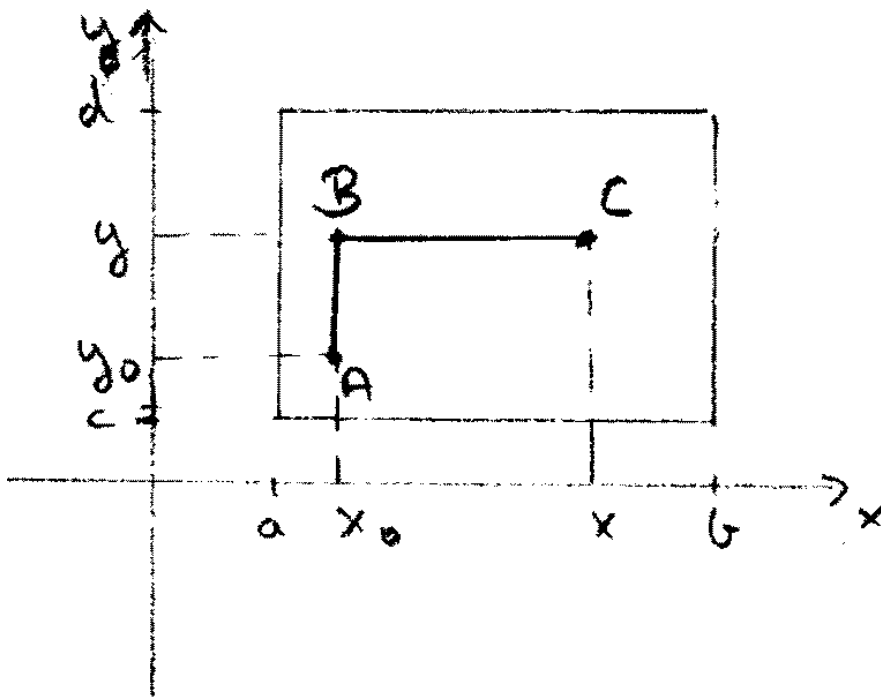
$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial t} Q(t, y) dt + Q(x_0, y)$$

czyli

$$(78.) \quad \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = Q(x, y).$$

Równości (77), (78) kończą dowód. \square

Zauważmy, że przy ustalonych (x_0, y_0) oraz (x, y) całkowanie we wzorze (76) odbywa się po łamanej ABC (rys. 40). W dowodzie korzystamy z faktu, że łamana ta zawarta jest w prostokącie otwartym Ω , w którym spełnione są założenia dotyczące funkcji P, Q . Obranie punktu (x_0, y_0) jest równoznaczne z ustaleniem stałej C w równości (70).



[rys. 40]

Przykład 11. Niech

$$\vec{v} = [2xy, x^2],$$

mamy zatem

$$P(x, y) = 2xy, \quad Q(x, y) = x^2,$$

skąd po zróżniczkowaniu dostajemy

$$\frac{\partial}{\partial x}Q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}P(x, y)$$

dla dowolnych $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pole \vec{v} jest więc bezwirowe w całej płaszczyźnie, co wobec twierdzenia 11 jest warunkiem koniecznym istnienia potencjału. W celu znalezienia potencjału pola \vec{v} należy rozwiązać układ równań

$$(79) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2.$$

Całkując pierwsze równanie względem x dostajemy przy ustalonym y

$$(80) \quad F(x, y) = x^2y + g(y),$$

skąd po zróżniczkowaniu i wykorzystaniu drugiego równania wynika

$$x^2 + g'(y) = x^2$$

czyli

$$g'(y) = 0.$$

Wobec tego $g(y)$ jest funkcją stałą i w oparciu o (80) dostajemy rozwiązanie układu (79) czyli potencjał pola w postaci

$$F(x, y) = x^2y + C.$$

Przykład 12. Jak pokazaliśmy w Przykładzie 10, pole wektorowe \vec{v} określone wzorem (72) jest bezwirowe w obszarze $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ale nie jest polem potencjalnym w tym obszarze. Łatwo natomiast sprawdzić przez różniczkowanie, że funkcja

$$F(x, y) = \arctg \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

jest potencjałem pola \vec{v} w każdej z półpłaszczyzn otwartych

$$\Omega_1 : x > 0, \quad \Omega_2 : x < 0.$$

Zatem, zgodnie z twierdzeniem 12, pole \vec{v} jest potencjalne w każdym z obszarów Ω_1, Ω_2 .

Rozważmy dwa regularne kontury K_1, K_2 mające opis parametryczny

$$x = x_j(t), \quad y = y_j(t) \quad (j = 1, 2; \quad a \leq t \leq b).$$

Mówimy, że kontury K_1, K_2 są *homotopijne w obszarze* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, jeżeli istnieje odwzorowanie ciągłe

$$H : (t, s) \longrightarrow (X, Y) \in \Omega \quad (a \leq t \leq b; \quad 0 \leq s \leq 1)$$

spełniające warunki

$$(i) \quad X(t, 0) = x_1(t), \quad Y(t, 0) = y_1(t) \quad (a \leq t \leq b),$$

$$(ii) \quad X(t, 1) = x_2(t), \quad Y(t, 1) = y_2(t) \quad (a \leq t \leq b),$$

(iii) dla dowolnie ustalonego $s \in (0, 1)$ krzywa o opisie parametrycznym

$$x = X(t, s), \quad y = Y(t, s) \quad (a \leq t \leq b)$$

jest konturem regularnym leżącym w Ω .

Z podanych warunków widać, że odwzorowanie H określa deformację ciągłą przeprowadzającą kontur K_1 w kontur K_2 bez wychodzenia z obszaru Ω .

Na zakończenie rozważań dotyczących całki krzywoliniowej zorientowanej podamy bez dowodu twierdzenie dotyczące pól bezwirowych.

Twierdzenie 13. *Zakładamy, że*

- (a) *pole wektorowe $\vec{v} = [P, Q]$ jest bezwiarowe w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,*
 (b) *regularne kontury K_1, K_2 są homotopijne w obszarze Ω .*

Wówczas

$$\int_{K_1} P dx + Q dy = \int_{K_2} P dx + Q dy.$$

Przykład 13. Niech K_a będzie okręgiem o środku w początku układu i promieniu a , zorientowanym dodatnio względem ograniczonego przezeń koła. Dla $a_1 > a_2 > 0$ przyjmijmy

$$H: \quad X = (sa_2 + (1-s)a_1) \cos t, \quad Y = (sa_2 + (1-s)a_1) \sin t, \\ (0 \leq t \leq 2\pi, \quad 0 \leq s \leq 1).$$

Odwzorowanie H jest ciągle i spełnia w obszarze $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ warunki (i), (ii), (iii), zatem okręgi K_{a_1} i K_{a_2} są homotopijne w tym obszarze, natomiast pole wektorowe $\vec{v} = [P, Q]$ określone wzorem (72) jest bezwiarowe w obszarze Ω . Jak okazaliśmy w Przykładzie 10, zachodzi równość

$$\int_{K_{a_1}} P dx + Q dy = \int_{K_{a_2}} P dx + Q dy = 2\pi$$

zgodnie z twierdzeniem 13.

4. Długość krzywej.

Niech K będzie krzywą w płaszczyźnie \mathbb{R}^2 . Mówimy, że K jest *krzywą gładką*, jeżeli ma opis parametryczny (1) taki, że funkcje $x(t)$, $y(t)$ są klasy C^1 w przedziale $[a, b]$ i spełniają warunek

$$(81) \quad \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) > 0 \quad \text{dla} \quad a \leq t \leq b$$

(przez pochodne na końcach przedziału rozumiemy pochodne jednostronne). Nierówność (81) oznacza, że dla dowolnie ustalonego $t \in [a, b]$ przynajmniej jedna z pochodnych $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ jest różna od zera. Wynika stąd, że dla każdego $t \in [a, b]$ istnieje niezerowy wektor $[\dot{x}(t), \dot{y}(t)]$ styczny do krzywej w punkcie $(x(t), y(t))$.

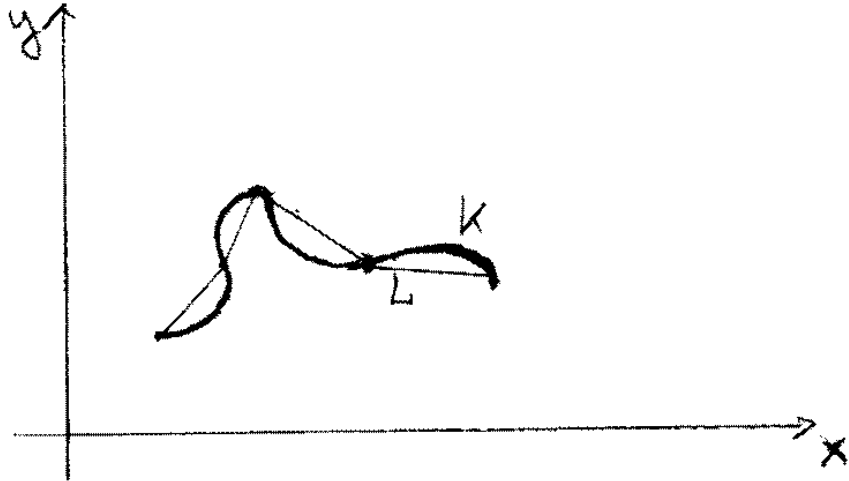
W dalszym ciągu będziemy zakładali, że K jest krzywą gładką. Wprowadzając podział

$$\Pi: a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$$

przedziału $[a, b]$ przyjmijmy oznaczenia

$$x_j = x(t_j), \quad y_j = y(t_j) \quad (j = 0, 1, \dots, r)$$

i niech $\Lambda(\Pi)$ oznacza łamaną o wierzchołkach (x_j, y_j) (por. rys. 41, gdzie $r=5$; krzywa K narysowana grubszą linią).



[rys. 41]

Można się spodziewać, że im mniejsza jest średnica podziału Π , tym lepiej długość $L(\Pi)$ łamanej $\Lambda(\Pi)$ przybliży długość krzywej K . Ze znanego wzoru na odległość punktów płaszczyzny wynika, że

$$L(\Pi) = \sum_{j=1}^r \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}.$$

Stosując twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej do funkcji $x(t)$, $y(t)$ otrzymujemy stąd

$$(82) \quad L(\Pi) = \sum_{j=1}^r \sqrt{\dot{x}^2(\bar{\tau}_j) + \dot{y}^2(\bar{\tau}_j)} \Delta t_j,$$

gdzie

$$\Delta t_j = t_j - t_{j-1} \quad \text{oraz} \quad \tau_j, \bar{\tau}_j \in (t_{j-1}, t_j).$$

Jeżeli $\tau_j = \bar{\tau}_j$, to wyrażenie po prawej stronie (82) przyjmuje postać sumy

$$(83) \quad S(f, \Pi, \tau(\Pi)) = \sum_{j=1}^r \sqrt{\dot{x}^2(\tau_j) + \dot{y}^2(\tau_j)} \Delta t_j,$$

która jest sumą przybliżoną całki z funkcji jednej zmiennej

$$f(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}.$$

Liczby τ_j , $\bar{\tau}_j$ są na ogół różne, gdyż są narzucone przez twierdzenie Lagrange'a stosowane w przedziale $[t_{j-1}, t_j]$ do dwóch różnych funkcji $x(t)$, $y(t)$. Okażemy jednak, że jeżeli średnica podziału Π jest dostatecznie mała, to suma (83) mało różni się od długości łamanej wyrażonej wzorem (82). Dokładniej - zachodzi

Twierdzenie 14. *Do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by z warunku $d(\Pi) < \delta$ wynikała nierówność*

$$|S(f, \Pi, \tau(\Pi)) - L(\Pi)| < \varepsilon$$

dla dowolnych $\tau_j, \bar{\tau}_j \in [t_{j-1}, t_j]$.

DOWÓD. Dowód zaczniemy od lematu.

Lemat. *Jeżeli $A^2 + B^2 > 0$, to dla dowolnego B_1 zachodzi nierówność*

$$(84) \quad |\sqrt{A^2 + B^2} - \sqrt{A^2 + B_1^2}| \leq |B - B_1|.$$

DOWÓD LEMATU. Mamy

$$\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{A^2 + B_1^2} = \frac{B^2 - B_1^2}{\sqrt{A^2 + B^2} + \sqrt{A^2 + B_1^2}}$$

czyli

$$(85) \quad \sqrt{A^2 + B^2} - \sqrt{A^2 + B_1^2} = Q(B - B_1),$$

gdzie

$$Q = \frac{B + B_1}{\sqrt{A^2 + B^2} + \sqrt{A^2 + B_1^2}}.$$

Ponieważ

$$|B + B_1| \leq \sqrt{B^2} + \sqrt{B_1^2} \leq \sqrt{A^2 + B^2} + \sqrt{A^2 + B_1^2},$$

mamy

$$|Q| \leq 1$$

i stąd wobec (85) dostajemy (84) □

Aby udowodnić twierdzenie zauważmy, że

$$(86) \quad S(f, \Pi, \tau(\Pi)) - L(\Pi) = \sum_{j=1}^r \left(\sqrt{\dot{x}^2(\tau_j) + \dot{y}^2(\tau_j)} - \sqrt{\dot{x}^2(\tau_j) + \dot{y}^2(\bar{\tau}_j)} \right) \Delta t_j.$$

Jeżeli dla ustalonego j przyjmiemy

$$(86) \quad \dot{x}(\tau_j) = A, \quad \dot{y}(\tau_j) = B, \quad \dot{y}(\bar{\tau}_j) = B_1,$$

to wobec warunku (81) założenia lematu są spełnione i możemy go zastosować do oszacowania różnicy (86). W oparciu o nierówność (84) dostajemy zatem

$$(87) \quad |S(f, \Pi, \tau(\Pi)) - L(\Pi)| \leq \sum_{j=1}^r |\dot{y}(\tau_j) - \dot{y}(\bar{\tau}_j)| \Delta t_j.$$

Z jednostajnej ciągłości pochodnej $\dot{y}(t)$ w przedziale $[a, b]$ wynika, że do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by z warunku $d(\Pi) < \delta$ wynikała nierówność

$$(88) \quad |\dot{y}(\tau_j) - \dot{y}(\bar{\tau}_j)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Z nierówności (87), (88) wynika teza twierdzenia. \square

Z twierdzenia 14 wynika, że dla dowolnego ciągu normalnego $\{\Pi_n\}$ podziałów przedziału $[a, b]$ istnieje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\Pi_n)$$

i że zachodzi równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\Pi_n) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

Wobec tego zgodnie z naszą intuicją geometryczną możemy określić długość $|K|$ gładkiej krzywej K wzorem

$$(89) \quad |K| = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt,$$

gdzie funkcje klasy $x(t), y(t)$ dają opis parametryczny (1) klasy C^1 tej krzywej.

Przykład 14. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest klasy C^1 w przedziale $[a, b]$, to jej wykres W ma opis parametryczny

$$x = t, \quad y = f(t), \quad (a \leq t \leq b).$$

Ponieważ

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1 + (f')^2 > 0,$$

wykres W jest krzywą gładką. Jego długość wynosi

$$|W| = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} dx$$

zgodnie ze wzorem znanym z początkowego kursu analizy.

5. Całka krzywoliniowa nieorientowana.

Niech K będzie krzywą gładką na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 . Krzywa K ma zatem opis parametryczny

$$(90) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad (a \leq t \leq b)$$

klasy C^1 i spełniający warunek (81). W dalszym ciągu założymy, że $F(t)$ jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$. Jeżeli w szczególności $f(x, y)$ jest funkcją określoną i ciągłą na krzywej K , to korzystając z równań (90) można przyjąć

$$(91) \quad F(t) = f(x(t), y(t)), \quad (a \leq t \leq b).$$

Rozważmy podział

$$\Pi : a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$$

przedziału $[a, b]$ i niech K_j oznacza część krzywej K opisaną równaniami (90) dla $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ ($j = 1, 2, \dots, r$). Obierając punkty pośrednie

$$\tau_j \in [t_{j-1}, t_j] \quad (j = 1, 2, \dots, r)$$

tworzymy sumę przybliżoną

$$(92) \quad T(F, \Pi, \tau(\Pi)) = \sum_{j=1}^r F(\tau_j) |K_j|,$$

gdzie $|K_j|$ oznacza długość krzywej K_j . Okażemy, że przy uczynionych założeniach istnieje liczba G taka, że dla dowolnego ciągu normalnego $\{\Pi_n\}$ przedziału $[a, b]$ i dowolnego układu punktów pośrednich $\tau(\Pi_n)$ zachodzi równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(F, \Pi_n, \tau(\Pi_n)) = G.$$

Liczbę G nazywamy *całką krzywoliniową niezorientowaną* funkcji F po krzywej K , zapisujemy

$$(93) \quad G = \int_K F ds.$$

Jeżeli w szczególności funkcja $F(t)$ jest określona wzorem (91), to liczbę G nazywamy *całką krzywoliniową niezorientowaną* funkcji $f(x, y)$ i zapisujemy

$$G = \int_K f(x, y) ds.$$

Dla dowodu zauważmy, że zgodnie ze wzorem (89)

$$|K_j| = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt,$$

co po zastosowaniu twierdzenia o wartości średniej rachunku całkowego daje

$$|K_j| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \Big|_{t=\bar{\tau}_j} \Delta t_j,$$

gdzie

$$\Delta t_j = t_j - t_{j-1}, \quad \bar{\tau}_j \in [t_{j-1}, t_j].$$

Sumę (92) możemy wobec tego zapisać w postaci

$$(94) \quad T(F, \Pi, \tau(\Pi)) = \sum_{j=1}^r F(\tau_j) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \Big|_{t=\bar{\tau}_j} \Delta t_j.$$

Jeżeli

$$(95) \quad \tau_j = \bar{\tau}_j,$$

to wyrażenie po prawej stronie (94) ma postać

$$(96) \quad S(g, \Pi, \bar{\tau}(\Pi)) = \sum_{j=1}^r g(\bar{\tau}_j) \Delta t_j$$

gdzie

$$(97) \quad g(t) = F(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}(t),$$

jest więc sumą przybliżoną całki

$$\int_a^b g(t) dt.$$

Równość (95) naogół nie zachodzi, gdyż punkty pośrednie τ_j zostały ustalone w dowolny sposób, natomiast liczby $\bar{\tau}_j$ są narzucone przez twierdzenie o wartości średniej. Łatwo jednak okazać, że przy dostatecznie małej średnicy podziału Π sumy (94) i (96) mało się różnią. Zachodzi bowiem

Lemat. *Do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla dowolnie obranych punktów pośrednich $\tau(\Pi)$ z warunku $d(\Pi) < \delta$ wynikała nierówność*

$$(98) \quad |T(F, \Pi, \tau(\Pi)) - S(g, \Pi, \bar{\tau}(\Pi))| < \varepsilon.$$

DOWÓD LEMATU. Oznaczając przez R różnicę po lewej stronie (98) mamy

$$|R| \leq \sum_{j=1}^r |F(\tau_j) - F(\bar{\tau}_j)| \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \Big|_{t=\bar{\tau}_j} \Delta t_j.$$

Funkcja $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ jest ciągła w przedziale $[a, b]$, a więc ograniczona w tym przedziale, wobec tego istnieje stała $M > 0$ taka, że

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \leq M$$

dla $t \in [a, b]$. Oprócz tego z jednostajnej ciągłości funkcji $F(t)$ w przedziale $[a, b]$ wynika, że do dowolnego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by z warunku $d(\Pi) < \delta$ wynikała nierówność

$$|F(\tau_j) - F(\bar{\tau}_j)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)}.$$

Wobec tego

$$|R| \leq M \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \sum_{j=1}^r \Delta t_j,$$

co daje (98). □

Ponieważ funkcja $g(t)$ określona wzorem (97) jest ciągła w przedziale $[a, b]$, dla dowolnego ciągu normalnego podziałów $\{\Pi_n\}$ zachodzi

$$(99) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S(g, \Pi_n, \bar{\tau}(\Pi_n)) = \int_a^b g(t) dt.$$

Z lematu wynika, że dla dowolnie obranych punktów pośrednich $\tau(\Pi_n)$ całka po prawej stronie (99) jest również granicą ciągu

$$T(F, \Pi_n, \tau(\Pi_n)),$$

zatem całka ta jest szukaną liczbą G . Jednocześnie otrzymujemy efektywny wzór pozwalający sprowadzić całkę krzywoliniową niezorientowaną do całki oznaczonej z funkcji jednej zmiennej

$$(100) \quad \int_K F ds = \int_a^b F(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

względnie

$$(101) \quad \int_K f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt,$$

jeżeli funkcja $F(t)$ jest określona wzorem (91). Dla ustalonego $t \in [a, b]$ oznaczmy przez $s(t)$ długość części krzywej K opisanej równaniami

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad (a \leq u \leq t).$$

Uwzględniając wzór (89) i warunek (81) mamy

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} du$$

i stąd

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}(t) > 0 \quad (a \leq t \leq b).$$

Oznacza to, że funkcja $s(t)$ jest ściśle rosnąca w przedziale $[a, b]$, istnieje więc funkcja odwrotna do niej $t(s)$. Dokonując podstawienia $t = t(s)$ w równaniach (90) dostajemy nowy opis parametryczny krzywej K

$$x = x(t(s)), \quad y = y(t(s)), \quad (0 \leq s \leq S = |K|),$$

w którym parametrem jest długość łuku. Ponieważ

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

co można zapisać w postaci różniczkowej jako

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

w nowym opisie parametrycznym wzór (100) przyjmuje postać

$$(102) \quad \int_K F ds = \int_0^S F(t(s)) ds.$$

Ze wzoru (102) łatwo odczytać interpretację fizyczną całki krzywoliniowej (93). Przypuśćmy, że krzywa K jest zrobiona z drutu i niech $m(s_0)$ oznacza masę części krzywej K dla $0 \leq s \leq s_0$. Wówczas wyrażenie

$$\frac{m(s_0 + \Delta s) - m(s_0)}{\Delta s}$$

jest średnią gęstością liniową krzywej na odcinku $s_0 \leq s \leq s_0 + \Delta s$, zaś granica tego wyrażenia przy $\Delta s \rightarrow 0$, czyli pochodna

$$\frac{dm}{ds}(s_0)$$

jest gęstością liniową krzywej K w punkcie $s = s_0$. Przyjmując gęstość liniową jako funkcję F we wzorze (102) dostajemy

$$\int_K F ds = \int_0^S \frac{dm(s)}{ds} ds$$

czyli

$$\int_K F ds = m(S),$$

zatem całka krzywoliniowa po lewej stronie daje całkowitą masę krzywej K .

6. Związek między całką krzywoliniową zorientowaną i niezorientowaną.

Niech K będzie krzywą gładką o opisie parametrycznym (90), zaś

$$\vec{v}(x, y) = [P(x, y), Q(x, y)]$$

polem wektorowym określonym i ciągłym na K . Zgodnie ze wzorem (14) mamy

$$\int_K P dx + Q dy = \int_a^b (P\dot{x} + Q\dot{y})(t) dt,$$

co po uwzględnieniu warunku (81) można zapisać w postaci

$$(103) \quad \int_K P dx + Q dy = \int_a^b F(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

gdzie

$$F(t) = \left(P \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + Q \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \Big|_{x=x(t), y=y(t)}.$$

Z uczynionych założeń wynika, że funkcja $F(t)$ jest ciągła w przedziale $[a, b]$, zatem zgodnie ze wzorem (100) po prawej stronie (103) mamy całkę krzywoliniową niezorientowaną. Wektor

$$\vec{e}(t) = \left[\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right]$$

jest wersorem stycznym do krzywej K o zwrocie zgodnym z kierunkiem obiegu tej krzywej wyznaczonym przez opis parametryczny (90) (por. rozdz. IV punkt 3), zaś funkcja $F(t)$ ma postać iloczynu skalarnego

$$F(t) = (\vec{v}(t), \vec{e}(t)),$$

gdzie $\vec{v}(t)$ jest wektorem pola w punkcie $(x(t), y(t)) \in K$. Wobec tego równość (103) można zapisać w postaci

$$(104) \quad \int_K P dx + Q dy = \int_K (\vec{v}, \vec{e}) ds.$$

Zauważmy, że przy zmianie orientacji krzywej K lewa strona (104) zmienia znak (por. punkt 1), zaś po prawej stronie ulega zmianie zwrot wektora \vec{e} a więc zmienia się znak funkcji podcałkowej.

Twierdzenie Greena (twierdzenia 6, 7) było w punkcie 2 sformułowane przy użyciu całki krzywoliniowej zorientowanej. Okażemy, że można je również zapisać używając całki krzywoliniowej niezorientowanej.

Załóżmy, że K jest krzywą zamkniętą (por. punkt 3). Będziemy mówili, że K jest *gładką krzywą zamkniętą*, jeżeli ma opis parametryczny (90) klasy C^1 spełniający warunek (81) i przy tym

$$(105) \quad x(a) = x(b), \quad y(a) = y(b), \quad \dot{x}_+(a) = \dot{x}_-(b), \quad \dot{y}_+(a) = \dot{y}_-(b).$$

Z warunków (81) i (105) wynika, że dla każdej wartości parametru $t \in [a, b]$ istnieje niezzerowy wektor styczny $[\dot{x}(t), \dot{y}(t)]$ zorientowany zgodnie z kierunkiem obiegu krzywej.

Wracając do twierdzenia Greena załóżmy, że $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ jest obszarem σ -normalnym ograniczonym gładką krzywą zamkniętą K zorientowaną dodatnio względem tego obszaru. Jeżeli wprowadzimy oznaczenia

$$(106) \quad p = Q, \quad q = -P,$$

to po wykorzystaniu (14) prawa strona wzoru (46) przyjmuje postać

$$\int_K P dx + Q dy = \int_a^b (-q\dot{x} + p\dot{y}) dt,$$

co wobec warunku (81) można zapisać w postaci

$$(107) \quad \int_K P dx + Q dy = \int_a^b G(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt,$$

gdzie

$$(108) \quad G(t) = \left(p \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - q \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \Big|_{x=x(t), y=y(t)}.$$

Ponieważ funkcja $G(t)$ jest ciągła w przedziale $[a, b]$, zgodnie ze wzorem (100) całka po prawej stronie (107) jest całką krzywoliniową nieorientowaną

$$\int_K G ds,$$

zatem przy oznaczeniach (106) wzór (46) przyjmuje postać

$$(109) \quad \iint_{\mathbb{D}} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx dy = \int_K G ds.$$

Ze wzoru (108) widać, że funkcja $G(t)$ ma postać iloczynu skalarnego

$$G(t) = (\vec{w}, \vec{n})(t),$$

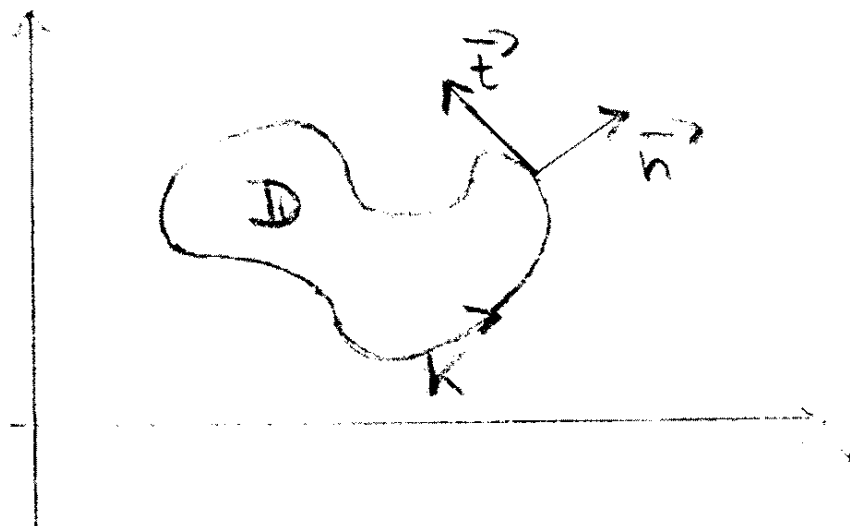
gdzie

$$\vec{w} = [p, q]$$

zaś wektor

$$\vec{n} = \left[\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \frac{-\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right]$$

jest wersorem normalnym do krzywej K zwróconym na zewnątrz obszaru \mathbb{D} (por. rys. 42, gdzie $\vec{t} = [\dot{x}, \dot{y}]$ jest wektorem stycznym o zwrocie zgodnym z kierunkiem obiegu krzywej K).



[rys. 42]

Wyrażenie podcałkowe po lewej stronie (109) nazywamy *dywergencją pola wektorowego* \vec{w} , zapisujemy

$$\operatorname{div} \vec{w} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}.$$

Ostatecznie przy uczynionych założeniach możemy wzór (46) zapisać w postaci

$$(110) \quad \iint_{\mathbb{D}} \operatorname{div} \vec{w} \, dx \, dy = \int_K (\vec{w}, \vec{n}) \, ds.$$

Sformułowanie twierdzenia Greena w postaci wzoru (110) ma ważną interpretację fizyczną. Przypuśćmy, że $\vec{w}(x, y)$ jest polem prędkości cieczy nieściśliwej płynącej w obszarze \mathbb{D} , wówczas całka po prawej stronie (110) jest proporcjonalna do objętości cieczy wypływającej z obszaru. Objętość ta jest równa objętości cieczy uzyskanej ze źródeł leżących w obszarze \mathbb{D} , wobec tego dywergencja pola \vec{w} stanowi miarę wydajności tych źródeł.

Zadania.

1. Narysować krzywą K i obliczyć następującą całkę krzywoliniową po tej krzywej:

a.) $\int_K y \, dx + x \, dy$, K ma opis parametryczny

$$x = t + 1, \quad y = 2t - 1, \quad (0 \leq t \leq 2);$$

b.) $\int_K (x + y) \, dx + (x - y) \, dy$, K ma opis parametryczny

$$x = t^2 + 1, \quad y = t^2 - 1, \quad (1 \leq t \leq 2);$$

c.) $\int_K y \cos x \, dx - x \cos y \, dy$, K ma opis parametryczny

$$x = t, \quad y = 2t, \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{4});$$

d.) $\int_K ye^x dx + xe^y dy$, K ma opis parametryczny

$$x = t, \quad y = 4t, \quad (0 \leq t \leq 1);$$

e.) $\int_K (x^2 + y) dx - (y^2 + x) dy$, K ma opis parametryczny

$$x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2});$$

2. Niech $K = K_1 \cup K_2$, gdzie K_1 jest półokręgiem o środku $(0,0)$ i promieniu 1 leżącym w półpłaszczyźnie $y > 0$ i zorientowanym w kierunku malejącej współrzędnej x zaś K_2 oznacza odcinek o początku $(-1,0)$ i końcu $(0,0)$. Narysować krzywą K i obliczyć całkę krzywoliniową

$$\int_K y dx + (1+x) dy.$$

3. Przy pomocy całki krzywoliniowej obliczyć

a.) pole przedziału $a \leq x \leq b$, $x \leq y \leq d$;

b.) pole obszaru zawartego między wykresami funkcji $y = 2 + \sin x$ oraz $y = \cos x$ dla $0 \leq x \leq \pi$;

c.) pole obszaru zawartego między wykresami funkcji $x = 3 + \cos y$ oraz $x = \sin y$ dla $0 \leq y \leq \pi$;

d.) pole obszaru zawartego między krzywą $y = x^4$ a prostą $y = 1$.

4. Przy ustalonym $a \in \mathbb{R}$ prosta $y = ax$ dzieli płaszczyznę \mathbb{R}^2 na dwie półpłaszczyzny otwarte

$$\Omega_1 : y > ax, \quad \Omega_2 : y < ax.$$

Okazać, że funkcja

$$F(x, y) = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x + ay}{y - ax}$$

jest potencjałem pola wektorowego (por. Przykład 10)

$$\vec{v} = \frac{1}{r^2}[-y, x] \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0)$$

w każdej z półpłaszczyzn Ω_j , ($j = 1, 2$).

5. Sprawdzić, że podane pole wektorowe jest bezwirowe w całej płaszczyźnie \mathbb{R}^2 i znaleźć jego potencjał:

a.) $\vec{v} = [y^2 - 2xy, 2xy - x^2]$,

b.) $\vec{v} = [10xy - 8y, 5x^2 - 8x + 3]$,

c.) $\vec{v} = [4x^3y^3 - 2y^2, 3x^4y^2 - 2xy]$.

6. Niech $\vec{v} = [P, Q]$ będzie jednym z pól wektorowych rozważanych w zadaniu 5 i niech $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$. Obliczyć całkę krzywoliniową

$$\int_A^B P dx + Q dy$$

dwiema metodami:

- a.) obierając odpowiednio drogę całkowania,
- b.) posługując się znalezionym potencjałem pola.

7. Sprawdzić, że pole wektorowe

$$\vec{v} = \left[\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right] \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0)$$

jest bezwirowe w obszarze $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ i znaleźć jego potencjał, następnie obliczyć całkę krzywoliniową

$$\int_A^B \frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy,$$

gdzie $A = (0, -2)$, $B = (3, 0)$.

8. Przy jakich założeniach o funkcji $f(x, y)$ całka krzywoliniowa

- a.) $\int_K (x + y) dx + f(x, y) dy$,
- b.) $\int_K f(x, y) dx - x^2 \cos y dy$,
- c.) $\int_K y^3 e^x dx - f(x, y) dy$

nie zależy od drogi całkowania?

9. Przy jakich założeniach o funkcji $g(x, y)$ całka krzywoliniowa

- a.) $\int_K (x^2 + y^2) e^x dx + g(x, y) dy$,
- b.) $\int_K g(x, y) (x dx + y dy)$

po dowolnej krzywej zamkniętej K jest równa 0?

10. Korzystając ze wzoru całkowego (89) obliczyć długość

- a.) okręgu o danym promieniu R ,
- b.) odcinka łączącego punkty (x_0, y_0) i (x_1, y_1) .

11. Obliczyć całki krzywoliniowe niezorientowane

- a.) $\int_K (x + y) ds$, gdzie K jest okręgiem o środku w punkcie (a, b) i promieniu R ;
- b.) $\int_K (x - y) ds$, gdzie K jest odcinkiem łączącym punkty (a, b) i (c, d) .