

Więcej o całce funkcji dwóch zmiennych.

1. Całkowanie przez podstawienie funkcji jednej zmiennej.

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie funkcji jednej zmiennej mówi, że dla $a < b$ przy założeniu ciągłości funkcji $f(x), g(t), g'(t)$ zachodzi równość

$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_A^B f(g(t))g'(t) dt,$$

gdzie

$$(2) \quad x = g(t), \quad a = g(A), \quad b = g(B).$$

Założmy, że funkcja g jest ściśle monotoniczna, istnieje wobec tego funkcja odwrotna do niej g^{-1} i (2) można zapisać w postaci

$$t = g^{-1}(x), \quad A = g^{-1}(a), \quad B = g^{-1}(b).$$

Rozważymy dwa przypadki:

(a) funkcja $g(t)$ jest ściśle rosnąca, wówczas

$$A < B, \quad \text{oraz} \quad g'(t) \geq 0$$

i równość (1) może być zapisana w postaci

$$(3') \quad \int_P f(x) dx = \int_Q f(g(t))|g'(t)| dt,$$

gdzie $P = [a, b]$, $Q = [A, B]$;

(b) funkcja $g(t)$ jest ściśle malejąca, wówczas

$$A > B \quad \text{oraz} \quad g'(t) \leq 0$$

i równość (1) można zapisać jako

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_B^A f(g(t))g'(t) dt$$

czyli

$$(3'') \quad \int_P f(x) dx = \int_Q f(g(t)) |g'(t)| dt,$$

gdzie $Q = [B, A]$.

Zauważmy, że w obu przypadkach możemy funkcję g traktować jako odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne przedziału Q na przedział P . Mamy więc

$$P = g(Q), \quad Q = g^{-1}(P)$$

i równości (3'), (3'') można zapisać w jednolitej postaci

$$(4) \quad \int_P f(x) dx = \int_{g^{-1}(P)} (f \circ g)(t) |g'(t)| dt,$$

gdzie $(f \circ g)(t) = f(g(t))$. W dalszym ciągu zobaczymy, że równość (4) przenosi się na przypadek funkcji dwóch zmiennych.

2. Zamiana zmiennych w całce podwójnej.

Zamiast podstawienia $x = g(t)$ będziemy teraz rozważali *odwzorowanie*

$$\Phi: \quad x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

z płaszczyzny $\mathbb{R}_{u,v}^2$ w płaszczyznę $\mathbb{R}_{x,y}^2$.

Będziemy mówili, że

(i) odwzorowanie Φ jest klasy C^k ($k = 1, 2, \dots$) w zbiorze otwartym Ω (zapisujemy: klasy $C^k(\Omega)$), jeżeli funkcje φ, ψ mają w Ω ciągle pochodne do rzędu k włącznie;

(ii) odwzorowanie Φ jest klasy C^k w obszarze domkniętym $\mathbb{B}$ (zapisujemy: klasy $C^k(\mathbb{B})$), jeżeli istnieje taki zbiór otwarty Ω zawierający $\mathbb{B}$, że Φ jest klasy $C^k(\Omega)$.

Jeżeli Φ jest klasy $C^1(\Omega)$, to możemy utworzyć macierz

$$\begin{bmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{bmatrix}.$$

Macierz tę nazywamy *macierzą Jacobiego* odwzorowania Φ , a jej wyznacznik

$$(5) \quad J(u, v) = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}$$

- *jakobianem* odwzorowania Φ .

Niech $\mathbb{B}$ będzie obszarem domkniętym w płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Mówimy, że odwzorowanie Φ jest *dyfeomorfizmem w obszarze* $\mathbb{B}$, jeżeli spełnia warunki:

(i) Φ jest klasy $C^1(\mathbb{B})$,

(ii) $J(u, v) \neq 0$ dla $(u, v) \in \mathbb{B}$,

(iii) odwzorowanie Φ jest różnowartościowe w obszarze $\mathbb{B}$.

Z warunku (iii) wynika, że istnieje odwzorowanie odwrotne Φ^{-1} , przy czym oznaczając

$$\mathbb{D} = \Phi(\mathbb{B})$$

mamy

$$\mathbb{B} = \Phi^{-1}(\mathbb{D})$$

(mówimy, że $\mathbb{D}$ jest obrazem obszaru $\mathbb{B}$ przy odwzorowaniu Φ).

Przykład 1. Wprowadźmy na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ współrzędne biegunowe

$$(6) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

(por. rozdz. II punkt 4). Możemy uważać, że wzory (6) określają odwzorowanie $\Phi(r, \theta)$ z płaszczyzny $\mathbb{R}_{r, \theta}^2$ w płaszczyznę $\mathbb{R}_{x, y}^2$, przy tym przyjmując jako obszar $\mathbb{B}$ nieograniczony przedział

$$\mathbb{B} : \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

mamy

$$\Phi(\mathbb{B}) = \mathbb{R}^2.$$

Odwzorowanie Φ jest klasy $C^1(\mathbb{B})$, jego macierz Jacobiego ma postać

$$\begin{bmatrix} \cos \theta, & \sin \theta \\ -r \sin \theta, & r \cos \theta \end{bmatrix},$$

zaś jacobian, zgodnie ze wzorem (5), jest równy

$$J(r, \theta) = r.$$

Odwzorowanie Φ nie jest dyfeomorfizmem w przedziale $\mathbb{B}$ z dwóch powodów:

1⁰ $J(0, \theta) = 0$, nie jest więc spełniony warunek (ii);

2⁰ $\Phi(r, 0) = \Phi(r, 2\pi)$ dla dowolnego $r \geq 0$ oraz $\Phi(0, \theta) = (0, 0)$ dla dowolnego $0 \leq \theta \leq 2\pi$, zatem nie jest spełniony warunek (iii).

Punkt 2⁰ oznacza geometrycznie, że odwzorowanie Φ "zlepia" dwa nieograniczone boki

$$L_1 = \{(r, \theta) : r \geq 0, \theta = 0\}$$

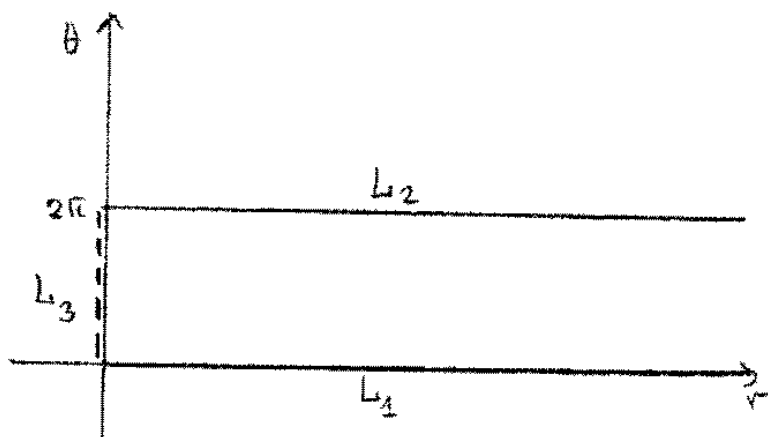
oraz

$$L_2 = \{(r, \theta) : r \geq 0, \theta = 2\pi\}$$

prostokąta $\mathbb{B}$ przekształcając je na nieujemną półoś x -ów, zaś bok

$$L_3 = \{(r, \theta) : r = 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

degeneruje się do jednego punktu $(0, 0)$ (por. rys. 43)



[rys. 43]

Rozważmy teraz nieograniczony przedział

$$\mathbb{B}_\varepsilon : \quad r \geq \varepsilon, \quad \varepsilon \leq \theta \leq 2\pi, \quad (\varepsilon > 0).$$

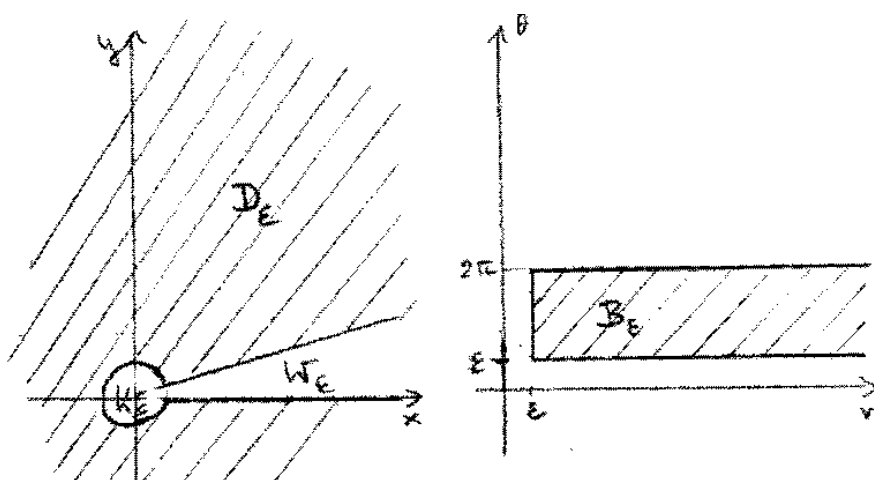
Obrazem

$$\mathbb{D}_\varepsilon = \Phi(\mathbb{B}_\varepsilon)$$

jest płaszczyzna $\mathbb{R}_{x,y}^2$, z której wycięto koło K_ε o środku w początku układu i promieniu ε oraz wycinek kątowy W_ε zawarty między dodatnią półosią x -ów a półprostą

$$l_\varepsilon = \{(x, y) : y = m_\varepsilon x, \quad x \geq 0\},$$

gdzie $m_\varepsilon = \tan \varepsilon$ (por. rys. 44, obszary $\mathbb{B}_\varepsilon$ i $\mathbb{D}_\varepsilon$ zakreskowane).



[rys. 44]

Pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie, że Φ jest dyfeomorfizmem w przedziale $\mathbb{B}_\varepsilon$ przy dowolnie ustalonym $\varepsilon > 0$.

Przykład 2. Niech $\mathbb{B}$ będzie przedziałem domkniętym

$$\mathbb{B}: \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1$$

i niech Φ będzie przekształceniem płaszczyzny $\mathbb{R}_{u,v}^2$ w płaszczyznę $\mathbb{R}_{x,y}^2$ określonym wzorami

$$\Phi: \quad x = u, \quad y = -v.$$

Łatwo sprawdzić, że Φ spełnia warunki (i), (iii), ponadto

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

zatem Φ jest dyfeomorfizmem w płaszczyźnie $\mathbb{R}_{u,v}^2$ i przy tym zbiór $\mathbb{D} = \Phi(\mathbb{B})$ jest przedziałem domkniętym

$$\mathbb{D}: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 0.$$

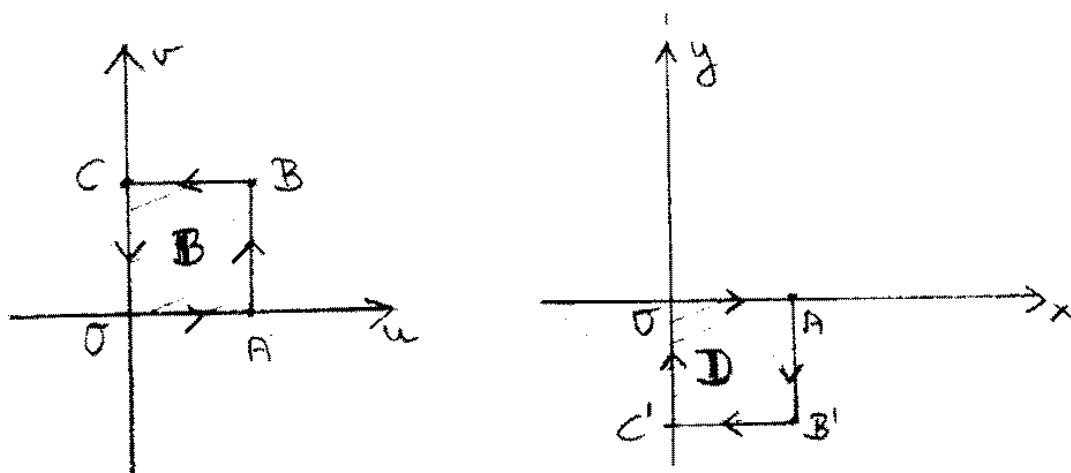
Przyjmijmy oznaczenia

$$O = (0, 0), \quad A = (1, 0), \quad B = (1, 1), \quad C = (0, 1)$$

oraz

$$\Phi(B) = (1, -1) = B', \quad \Phi(C) = (0, -1) = C'$$

i załóżmy, że łamana $L = OABC$ ograniczająca przedział $\mathbb{B}$ jest zorientowana dodatnio względem tego przedziału, wówczas łamana $\Phi(L) = OAB'C'$ ograniczająca przedział $\mathbb{D}$ jest zorientowana ujemnie względem $\mathbb{D}$ (rys. 45). Widzimy więc, że dyfeomorfizm może zmienić orientację brzegu.



[rys. 45]

Udowodnimy teraz

Twierdzenie 1 (o całkowaniu przez podstawienie). Zakładamy, że
 1^0 $\mathbb{B}$ jest obszarem regularnym w płaszczyźnie $\mathbb{R}_{u,v}^2$ (por. rozdz. V punkt 4);
 2^0 odwzorowanie

$$(7) \quad \Phi: \quad x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

jest dyfeomorfizmem w obszarze $\mathbb{B}$;

3^0 obraz $\mathbb{D}$ zbioru $\mathbb{B}$ przy odwzorowaniu Φ jest obszarem regularnym w płaszczyźnie $\mathbb{R}_{x,y}^2$;

4^0 funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w obszarze $\mathbb{D}$.

Wówczas

$$(8) \quad \iint_{\mathbb{D}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathbb{B}} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

Uwaga 1. Na mocy założenia 3^0 mamy

$$(9) \quad \mathbb{D} = \Phi(\mathbb{B}), \quad \mathbb{B} = \Phi^{-1}(\mathbb{D}),$$

zatem uwzględniając (7) można wzór (8) zapisać w postaci

$$(8') \quad \iint_{\mathbb{D}} f dx dy = \iint_{\Phi^{-1}(\mathbb{D})} (f \circ \Phi) |J| du dv,$$

gdzie

$$(f \circ \Phi)(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)).$$

DOWÓD. Dowód przeprowadzimy przy dodatkowych założeniach:

- (a) każdy z obszarów $\mathbb{B}$, $\mathbb{D}$ jest σ -normalny (por. rozdz. VI punkt 2);
- (b) odwzorowanie Φ jest klasy $C^2(\mathbb{B})$;
- (c) istnieje przedział domknięty

$$\mathbb{P}: \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

taki, że obszar $\mathbb{D}$ zawiera się w jego wnętrzu

$$\mathbb{P}_0: \quad a < x < b, \quad c < y < d,$$

zaś funkcja f jest klasy $C^1(\mathbb{P})$ (por. rozdz. VI punkt 2).

Zacniemy od udowodnienia lematu.

Lemat. *Niech*

$$F(x, y) = \int_a^x f(t, y) dt,$$

wówczas funkcja F jest klasy $C^1(\mathbb{I}\mathbb{P}_0)$.

DOWÓD LEMATU. Stosując twierdzenie o różniczkowaniu całki względem parametru dostajemy

$$(10) \quad F_x(x, y) = f(x, y), \quad F_y(x, y) = \int_a^x f_y(t, y) dt$$

dla $(x, y) \in \mathbb{I}\mathbb{P}_0$. Z założenia (c) wynika ciągłość funkcji F i pochodnej F_x w przedziale $\mathbb{I}\mathbb{P}_0$, pozostaje udowodnić ciągłość pochodnej F_y . Dla ustalonego $(x_0, y_0) \in \mathbb{I}\mathbb{P}_0$ oraz $(x, y) \in \mathbb{I}\mathbb{P}$ mamy po uwzględnieniu (10)

$$(11) \quad F_y(x, y) - F_y(x_0, y_0) = \left[\int_a^x f_y(t, y) dt - \int_a^{x_0} f_y(t, y) dt \right] + \left[\int_a^{x_0} f_y(t, y) dt - \int_a^{x_0} f_y(t, y_0) dt \right].$$

Z ciągłości pochodnej f_y w przedziale domkniętym $\mathbb{I}\mathbb{P}$ wynika istnienie stałej $M > 0$ takiej, że

$$|f_y(x, y)| \leq M \quad \text{dla} \quad (x, y) \in \mathbb{I}\mathbb{P}$$

(por. rozdz. III twierdzenie 6) i wobec tego

$$(12) \quad \left| \int_a^x f_y(t, y) dt - \int_a^{x_0} f_y(t, y) dt \right| \leq M|x - x_0|.$$

Ponadto f_y jest jednostajnie ciągła w przedziale $\mathbb{I}\mathbb{P}$, zatem do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ można dobrać $\delta > 0$ tak, by dla

$$(13) \quad |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$$

zachodziła nierówność

$$(14) \quad |f_y(t, y) - f_y(t, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Nie zmniejszając ogólności możemy założyć, że

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2M},$$

wówczas z (11), (12), (14) wynika, że dla (x, y) spełniających (13) mamy

$$|F_y(x, y) - F_y(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

a to oznacza ciągłość funkcji F_y w punkcie (x_0, y_0) . □

Wracając do dowodu twierdzenia założymy, że regularna krzywa K ograniczająca obszar $\mathbb{B}$ jest zorientowana dodatnio względem tego obszaru. Jeżeli opis parametryczny K ma postać

$$(15) \quad K : \quad u = u(t), \quad v = v(t) \quad (a \leq t \leq b),$$

to opis parametryczny krzywej C ograniczającej obszar $\mathbb{D}$ otrzymujemy podstawiając (15) do równań (7), co daje

$$(16) \quad C : \quad x = \varphi(u(t), v(t)), \quad y = \psi(u(t), v(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

(jak widać z Przykładu 2, krzywa C może nie być zorientowana dodatnio względem obszaru $\mathbb{D}$). Uwzględniając (10) mamy

$$(17) \quad \iint_{\mathbb{D}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx dy,$$

przy czym z lematu wynika, że funkcja F jest klasy $C^1(\mathbb{D})$. Możemy wobec tego zastosować do prawej strony (17) twierdzenie Greena (rozdz. VI, twierdzenia 6, 7, wzór (46)), co daje

$$(18) \quad \iint_{\mathbb{D}} f(x, y) dx dy = \alpha \int_C F(x, y) dy,$$

gdzie

$\alpha = 1$, gdy krzywa C jest zorientowana dodatnio względem obszaru $\mathbb{D}$

oraz

$\alpha = -1$, gdy krzywa C jest zorientowana ujemnie względem obszaru $\mathbb{D}$.

Zajmiemy się teraz przekształceniem całki krzywoliniowej po prawej stronie (18). Jeżeli opis parametryczny (15) jest klasy C^1 , to korzystając z opisu parametrycznego (16) krzywej C dostajemy zgodnie z twierdzeniem 1 rozdz. VI

$$(19) \quad \int_C F(x, y) dy = \int_a^b \left[F(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \right]_{u=u(t), v=v(t)} \dot{y} dt.$$

Stosując do drugiego z równań (16) regułę różniczkowania funkcji złożonej otrzymujemy

$$\dot{y}(t) = \left[\psi_u \dot{u} + \psi_v \dot{v} \right]_{u=u(t), v=v(t)}$$

i wobec tego całka po prawej stronie (19) może być zapisana w postaci

$$\int_a^b \left[(F \circ \Phi) \psi_u \dot{u} + (F \circ \Phi) \psi_v \dot{v} \right]_{u=u(t), v=v(t)} dt,$$

gdzie

$$(F \circ \Phi)(u, v) = F(\varphi(u, v), \psi(u, v)).$$

Zauważmy jednak, że ostatnią całkę możemy uważać za całkę krzywoliniową

$$\int_K (F \circ \Phi) \psi_u du + (F \circ \Phi) \psi_v dv$$

zapisaną przy użyciu opisu parametrycznego (15), zatem z równości (19) wynika, że

$$(20) \quad \int_c F(x, y) dy = \int_K P(u, v) du + Q(u, v) dv,$$

gdzie

$$(21) \quad P(u, v) = (F \circ \Phi) \psi_u, \quad Q(u, v) = (F \circ \Phi) \psi_v.$$

W przypadku ogólnym, gdy opis parametryczny (15) jest kawałkami klasy C^1 , możemy przeprowadzić podobny rachunek, rozbijając całkę po przedziale $[a, b]$ na sumę całek po przedziałach $[c_{j-1}, c_j]$ ($j = 1, \dots, p$) i opierając się na twierdzeniu 1' rozdz. VI.

Ponieważ funkcje P, Q są klasy $C^1(\mathbb{B})$, możemy ponownie zastosować twierdzenie Greena, tym razem do prawej strony (20). Stosując wzór (46) (z zastąpieniem x przez u , y przez v) i uwzględniając (18), (20) dostajemy

$$(22) \quad \iint_{\mathbb{B}} f(x, y) dx dy = \alpha \iint_{\mathbb{B}} \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du dv.$$

Aby otrzymać tezę twierdzenia należy przekształcić wyrażenie pod całką po prawej stronie (22). Oznaczając je przez $W(u, v)$ i stosując regułę różniczkowania funkcji złożonej otrzymujemy

$$W(u, v) = (F \circ \Phi)_u \psi_v + (F \circ \Phi) \psi_{vu} - (F \circ \Phi)_v \psi_u - (F \circ \Phi) \psi_{uv}.$$

Po uwzględnieniu równości pochodnych mieszanych (por. rozdz. II twierdzenie 5) dalsze różniczkowanie daje

$$W(u, v) = (F_x \varphi_u + F_y \psi_u) \psi_v - (F_x \varphi_v + F_y \psi_v) \psi_u \quad (x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)),$$

skąd po redukcji dostajemy

$$W(u, v) = \left[F_x \right]_{x=\varphi(u, v), y=\psi(u, v)} (\varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u)$$

czyli, po uwzględnieniu (5), (10),

$$(23) \quad W(u, v) = (f \circ \Phi)(u, v) J(u, v).$$

Równości (22), (23) dają

$$(24) \quad \iint_{\mathbb{B}} f(x, y) dx dy = \alpha \iint_{\mathbb{B}} (f \circ \Phi)(u, v) J(u, v) du dv.$$

Ostatnia równość została udowodniona dla dowolnej funkcji f spełniającej założenie (c). Przyjmując w szczególności $f(x, y) = 1$ dostajemy (por. rozdz. V punkt 4)

$$(25) \quad 0 < |\mathbb{D}| = \iint_{\mathbb{B}} \alpha J(u, v) \, du \, dv.$$

Ponieważ odwzorowanie Φ jest dyfeomorfizmem, z warunków (i), (ii) wynika, że jacobian $J(u, v)$ jest funkcją ciągłą i różną od zera w obszarze $\mathbb{B}$, zatem ma stały znak w tym obszarze (por. zadanie 10). Wobec tego wyrażenie $\alpha J(u, v)$ również ma stały znak w tym obszarze, a to wobec (25) oznacza, że

$$J(u, v) > 0 \quad \text{gdy} \quad \alpha = 1 \quad \text{oraz} \quad J(u, v) < 0 \quad \text{gdy} \quad \alpha = -1.$$

W obu przypadkach mamy

$$(26) \quad \alpha J(u, v) = |J(u, v)|.$$

Równości (24), (26) dają tezę twierdzenia. □

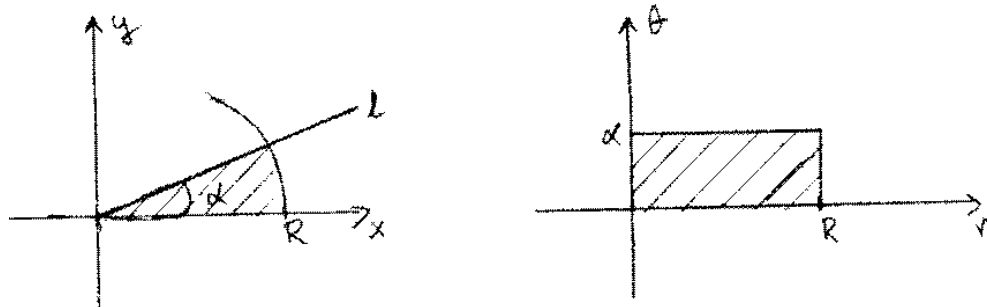
Uwaga 2. Z przeprowadzonego dowodu wynika, że gdy $J(u, v) > 0$ w obszarze $\mathbb{B}$, to dyfeomorfizm Φ zachowuje orientację brzegu względem obszaru;

gdy $J(u, v) < 0$ w obszarze $\mathbb{B}$, to dyfeomorfizm Φ zmienia orientację brzegu na przeciwną (por. Przykład 2).

Uwaga 3. Porównanie równości (4) i (8') wykazuje, że jacobian odwzorowania odgrywa podobną rolę w całce podwójnej jak pochodna podstawienia w całce funkcji jednej zmiennej. W związku z tym dla jacobianu odwzorowania określonego wzorami (7) bywa używane oznaczenie

$$J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

Przykład 3. Niech K będzie kołem o środku w początku układu płaszczyzny $\mathbb{R}_{x,y}^2$ i promieniu R . Obliczymy pole wycinka koła K zawartego między dodatnią półosią x -ów a prostą l , która tworzy z tą półosią kąt $\alpha \in (0, 2\pi)$ (rys. 46).



[rys. 46]

Oznaczając wycinek przez W mamy (por. rozdz. V punkt 4)

$$(27) \quad |W| = \iint_W dx dy.$$

Wycinek W można w prosty sposób opisać we współrzędnych biegunowych nierównościami

$$(28) \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq \alpha,$$

wobec tego całkę (27) wygodnie będzie liczyć przy użyciu współrzędnych biegunowych czyli w oparciu o twierdzenie 1, przyjmując $u = r$, $v = \theta$ i określając odwzorowanie Φ wzorami

$$(29) \quad \Phi : \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Zauważmy jednak, że odwzorowanie Φ nie jest dyfeomorfizmem w obszarze domkniętym $\mathbb{B}$ określonym nierównościami (28), gdyż $J(r, \theta) = r$ i wobec tego $J(0, \theta) = 0$ (por. Przykład 1). Aby zastosować twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie przedstawimy wycinek W jako sumę obszarów domkniętych

$$W = V_\varepsilon \cup \Delta_\varepsilon,$$

gdzie

$$V_\varepsilon = W \setminus K_\varepsilon, \quad \Delta_\varepsilon = W \cap \overline{K_\varepsilon},$$

zaś K_ε , $\overline{K_\varepsilon}$ oznaczają odpowiednio koło otwarte i koło domknięte o środku w początku układu i promieniu $\varepsilon < R$. Zgodnie z twierdzeniem 10 rozdz. V mamy

$$(30) \quad \iint_W dx dy = \iint_{V_\varepsilon} dx dy + \iint_{\Delta_\varepsilon} dx dy,$$

przy czym

$$\iint_{\Delta_\varepsilon} dx dy = |\Delta_\varepsilon| \leq \pi \varepsilon^2.$$

Wobec tego druga całka po prawej stronie (30) dąży do zera gdy $\varepsilon \rightarrow 0$ i z (27), (30) otrzymujemy

$$(31) \quad |W| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{V_\varepsilon} dx dy.$$

Niech $\mathbb{B}_\varepsilon$ będzie przedziałem w płaszczyźnie $R_{r,\theta}^2$ określonym nierównościami

$$\mathbb{B}_\varepsilon : \quad \varepsilon \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq \alpha.$$

Ponieważ

$$\Phi(\mathbb{B}_\varepsilon) = V_\varepsilon$$

i odwzorowanie Φ jest dyfeomorfizmem w obszarze $\mathbb{B}_\varepsilon$, możemy zastosować twierdzenie 1, co daje

$$(32) \quad \iint_{V_\varepsilon} dx dy = \iint_{\mathbb{B}_\varepsilon} r dr d\theta.$$

Zamieniając całkę po prawej stronie (32) na całkę iterowaną mamy

$$(33) \quad \iint_{\mathbb{B}_\varepsilon} r dr d\theta = \int_\varepsilon \int_0^\alpha r d\theta dr = \frac{1}{2} \alpha (R^2 - \varepsilon^2),$$

zaś z (31), (32), (33) dostajemy

$$(34) \quad |W| = \frac{1}{2} \alpha R^2.$$

Przypuśćmy teraz, że chcemy obliczyć całkę

$$(35) \quad \iint_{\mathbb{D}} f(x, y) dx dy$$

przy użyciu współrzędnych biegunowych, zakładając przy tym, że

1⁰ $f(x, y)$ jest funkcją ciągłą w obszarze regularnym $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}_{x,y}^2$ (por. rozdz. V punkt 4);

2⁰ $\mathbb{D} = \Phi(\mathbb{B})$, gdzie Φ oznacza odwzorowanie określone wzorami (29) (odpowiadające wprowadzeniu współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie $\mathbb{R}_{x,y}^2$), zaś $\mathbb{B}$ jest obszarem regularnym w płaszczyźnie $\mathbb{R}_{r,\theta}^2$ zawartym w przedziale

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi;$$

Odwzorowanie Φ nie jest na ogół dyfeomorfizmem w obszarze $\mathbb{B}$ (por. Przykład 1), nie jest więc spełnione założenie 2⁰ twierdzenia 1. Okażemy, że mimo to można przekształcić całkę (35) wprowadzając współrzędne biegunowe i korzystając ze wzoru (8).

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\mathbb{B}_\varepsilon = \mathbb{B} \cap \mathbb{P}_\varepsilon, \quad \Sigma_\varepsilon = \overline{\mathbb{B} \setminus \mathbb{B}_\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0),$$

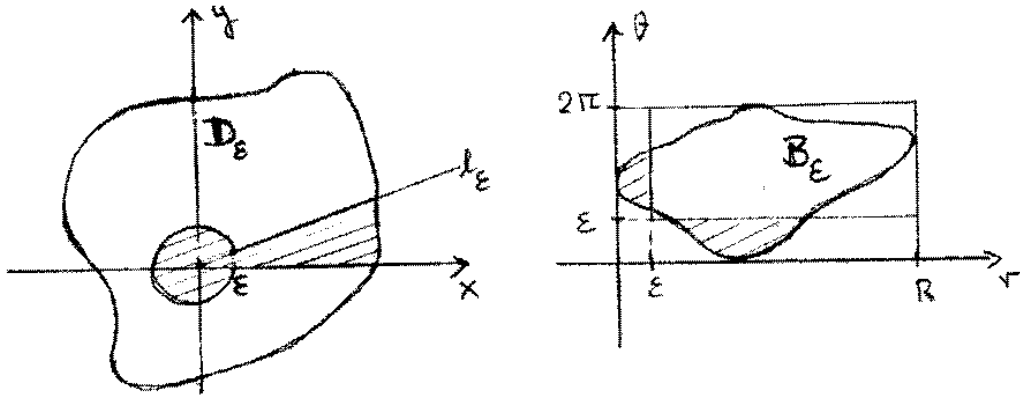
gdzie $\mathbb{P}_\varepsilon$ jest przedziałem

$$\mathbb{P}_\varepsilon : \quad \varepsilon \leq r \leq R, \quad \varepsilon \leq \theta \leq 2\pi$$

oraz

$$\mathbb{D}_\varepsilon = \Phi(\mathbb{B}_\varepsilon), \quad \Delta_\varepsilon = \overline{\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_\varepsilon}$$

- rys. 47, obszary Σ_ε oraz Δ_ε zakreskowane (przypominamy, dla dowolnego zbioru Ω przez $\overline{\Omega}$ oznaczamy jego domknięcie, por. rozdz. III punkt 5).



[rys. 47]

Ponieważ odwzorowanie Φ jest dyfeomorfizmem w każdym obszarze $\mathbb{B}_\varepsilon$, na mocy twierdzenia 1 dostajemy

$$(36) \quad \iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} f \, dx \, dy = \iint_{\mathbb{B}_\varepsilon} (f \circ \Phi) r \, dr \, d\theta.$$

Ponadto mamy

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}_\varepsilon \cup \Delta_\varepsilon, \quad \mathbb{B} = \mathbb{B}_\varepsilon \cup \Sigma_\varepsilon$$

i stąd, zgodnie z twierdzeniem 10 rozdz. V,

$$(37) \quad \iint_{\mathbb{D}} f \, dx \, dy = \iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} f \, dx \, dy + \iint_{\Delta_\varepsilon} f \, dx \, dy$$

oraz

$$(38) \quad \iint_{\mathbb{B}} (f \circ \Phi) r \, dr \, d\theta = \iint_{\mathbb{B}_\varepsilon} (f \circ \Phi) r \, dr \, d\theta + \iint_{\Sigma_\varepsilon} (f \circ \Phi) r \, dr \, d\theta.$$

Zauważmy, że

A) $\Delta_\varepsilon \subset \overline{K_\varepsilon} \cup (\overline{W_\varepsilon} \cap \mathbb{D})$, gdzie

K_ε jest kołem o środku w początku układu i promieniu ε

zaś

W_ε jest obszarem płaszczyzny $\mathbb{R}_{x,y}^2$ zawartym między dodatnią półosią x -ów a prostą l_ε , która z tą półosią tworzy kąt ε (rys. 47),

wobec tego (por. Przykład 3 i wzór (34))

$$(39) \quad |\Delta_\varepsilon| \leq \pi \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \varepsilon R^2;$$

B) $\Sigma_\varepsilon \subset Q_\varepsilon \cup S_\varepsilon$, gdzie Q_ε oraz S_ε są prostokątami (rys. 47), wobec tego

$$(40) \quad |\Sigma_\varepsilon| \leq (2\pi + R)\varepsilon.$$

Ponadto z założenia 1⁰ wynika istnienie stałej $M > 0$ takiej, że

$$(41) \quad |f(x, y)| \leq M \quad \text{dla} \quad (x, y) \in \mathbb{D}$$

(por. rozdz. III punkt 5). Opierając się na twierdzeniach 3', 4' rozdz. V otrzymujemy z nierówności (39), (40), (41) oszacowania

$$\left| \iint_{\Delta_\varepsilon} f \, dx \, dy \right| \leq M \iint_{\Delta_\varepsilon} dx \, dy \leq M(\pi\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\varepsilon R^2)$$

oraz

$$\left| \iint_{\Sigma_\varepsilon} (f \circ \Phi) r \, dr \, d\theta \right| \leq MR \iint_{\Sigma_\varepsilon} dr \, d\theta \leq MR(2\pi + R)\varepsilon.$$

Z oszacowań tych wynika, że

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\Delta_\varepsilon} f \, dx \, dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\Sigma_\varepsilon} (f \circ \Phi) r \, dr \, d\theta = 0$$

zatem, przechodząc do granicy przy $\varepsilon \rightarrow 0$ w równościach (37), (38) dostajemy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} f \, dx \, dy = \iint_{\mathbb{D}} f \, dx \, dy, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{B}_\varepsilon} (f \circ \Phi) r \, dr \, d\theta = \iint_{\mathbb{B}} (f \circ \Phi) r \, dr \, d\theta.$$

Wobec tego można również przejść do granicy w równości (36), co daje ostatecznie

$$\iint_{\mathbb{D}} f \, dx \, dy = \iint_{\mathbb{B}} (f \circ \Phi) r \, dr \, d\theta.$$

Opierając się na przeprowadzonym rachunku możemy sformułować

Twierdzenie 2 (o całkowaniu przez podstawienie we współrzędnych biegunowych).

Zakładamy, że

1⁰ *funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w obszarze regularnym $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}_{x,y}^2$ (por. rozdz. V punkt 4);*

2⁰ *oznaczając przez Φ odwzorowanie*

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

(odpowiadające wprowadzeniu współrzędnych biegunowych w płaszczyźnie $\mathbb{R}_{x,y}^2$) mamy

$$\mathbb{D} = \Phi(\mathbb{B}),$$

gdzie $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}_{r,\theta}^2$ jest obszarem regularnym zawartym w przedziale

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi;$$

Wówczas

$$(42) \quad \iint_{\mathbb{D}} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathbb{B}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \, r \, dr \, d\theta.$$

Przykład 4. Zastosujemy wzór (42) do obliczenia całki Poissona

$$P = \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx.$$

Jest to całka niewłaściwa, zdefiniowana jako granica

$$P = \lim_{r \rightarrow \infty} P_R, \quad P_R = \int_0^R e^{-x^2} \, dx$$

(w początkowym wykładzie analizy matematycznej dowodzi się, że granica ta istnieje).

Niech Q_R będzie kwadratem w płaszczyźnie $\mathbb{R}_{x,y}^2$ określonym nierównościami

$$Q_R : \quad |x| \leq R, \quad |y| \leq R$$

i niech K_a oznacza koło domknięte o środku w początku układu płaszczyzny $\mathbb{R}_{x,y}^2$ i promieniu a . Wówczas K_R jest kołem wpisanym w kwadrat Q_R zaś $K_{R\sqrt{2}}$ - kołem opisanym na tym kwadracie (proponujemy Czytelnikowi zrobienie rysunku) i wobec tego

$$(43) \quad K_R \subset Q_R \subset K_{R\sqrt{2}}.$$

Ponieważ

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \geq 0,$$

z inkluzji (43) wynika nierówność dla całek

$$(44) \quad \iint_{K_R} f \, dx \, dy \leq \iint_{Q_R} f \, dx \, dy \leq \iint_{K_{R\sqrt{2}}} f \, dx \, dy$$

(por. Uwaga w rozdz. V punkt 4). Środkową całkę w nierówności (44), po zamianie jej na całkę iterowaną, możemy zapisać jako iloczyn

$$\left(\int_{-R}^R e^{-x^2} \, dx \right) \left(\int_{-R}^R e^{-y^2} \, dy \right).$$

Ponieważ funkcja e^{-x^2} jest parzysta, z nierówności (44) dostajemy ostatecznie

$$(45) \quad \iint_{K_R} f \, dx \, dy \leq (2P_R)^2 \leq \iint_{K_{R\sqrt{2}}} f \, dx \, dy.$$

Do obliczenia całek podwójnych w nierówności (45) zastosujemy wzór (42). Mamy dla dowolnego $a > 0$

$$\iint_{K_a} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r e^{-r^2} dr = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_{r=0}^{r=a} = \pi (1 - e^{-a^2}),$$

zatem nierówność (45) możemy zapisać w postaci

$$\pi (1 - e^{-R^2}) \leq (2P_R)^2 \leq \pi (1 - e^{-2R^2}).$$

Po przejściu do granicy przy $R \rightarrow \infty$ i zastosowaniu twierdzenia o trzech funkcjach wynika stąd, że

$$(2P)^2 = \pi$$

czyli

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Przyjmijmy, że

- (i) $f(x, y) = 1$,
- (ii) spełnione są założenia twierdzenia 1 z zastąpieniem $\mathbb{B}$ przez $\mathbb{B}_a$ oraz $\mathbb{D}$ przez $\mathbb{D}_a = \Phi(\mathbb{B}_a)$,
- (iii) oznaczając przez $K_a(u_0, v_0)$ koło domknięte o środku (u_0, v_0) i promieniu a mamy

$$(u_0, v_0) \in \mathbb{B}_a \subset K_a(u_0, v_0) \quad (0 < a \leq a_0).$$

Przy uczynionych założeniach wzór (8) daje

$$|\mathbb{D}_a| = \iint_{\mathbb{B}_a} |J| du dv,$$

a stąd, po zastosowaniu twierdzenia o monotoniczności całki (twierdzenie 3' rozdz. V punkt 4) wynika oszacowanie

$$m_a |\mathbb{B}_a| \leq |\mathbb{D}_a| \leq M_a |\mathbb{B}_a|,$$

gdzie

$$m_a = \inf_{K_a} |J|, \quad M_a = \sup_{K_a} |J|.$$

Oszacowanie to można zapisać w równoważnej postaci jako nierówność

$$(46) \quad m_a \leq \frac{|\mathbb{D}_a|}{|\mathbb{B}_a|} \leq M_a.$$

Z założenia 2^o twierdzenia 1 wynika, że $J(u, v)$ jest funkcją ciągłą, zatem

$$\lim_{a \rightarrow 0} m_a = \lim_{a \rightarrow 0} M_a = |J(u_0, v_0)|$$

i przejście do granicy w (46) daje

$$(47) \quad \lim_{a \rightarrow 0} \frac{|\mathbb{D}_a|}{|\mathbb{B}_a|} = |J(u_0, v_0)|.$$

Uwaga 4. Przejście do granicy (47) można odczytać następująco: dla małych obszarów $\mathbb{B}$ oraz $\mathbb{D} = \Phi(\mathbb{B})$ współczynnik deformacji pola

$$\frac{|\mathbb{D}|}{|\mathbb{B}|}$$

jest w przybliżeniu równy wartości bezwzględnej jacobianu odwzorowania Φ .

Uwaga 2 oraz Uwaga 4 wraz z równością (47) charakteryzują własności geometryczne jacobianu.

3. Zastosowanie całki podwójnej do obliczania pola powierzchni.

Zacniemy od udowodnienia lematu.

Lemat. Załóżmy, że

1⁰ Σ jest płaszczyzną w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przecinającą oś z -ów;

2⁰ $\mathbb{I}\mathbb{P}$ jest przedziałem w płaszczyźnie $z = 0$;

3⁰ Q oznacza rzut prostopadły do płaszczyzny $z = 0$ przedziału $\mathbb{I}\mathbb{P}$ na płaszczyznę Σ .

Wówczas

$$(48) \quad |\mathbb{I}\mathbb{P}| = |Q| |\cos \gamma|,$$

gdzie γ oznacza kąt między wektorem prostopadłym do płaszczyzny Σ a dodatnią półosią z -ów.

DOWÓD. Dla uproszczenia rachunków założymy, że

(i) płaszczyzna Σ przechodzi przez początek układu, zatem jest określona równaniem

$$\Sigma : \quad Ax + By + Cz = 0,$$

gdzie

$$(49) \quad A^2 + B^2 + C^2 = 1, \quad C \neq 0;$$

(ii) przedział $\mathbb{I}\mathbb{P}$ jest określony nierównościami

$$\mathbb{I}\mathbb{P} : \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b \quad (a, b > 0).$$

Łatwo zauważyć, że założenia (i), (ii) są zawsze spełnione po odpowiednim przesunięciu płaszczyzny Σ i przedziału $\mathbb{I}\mathbb{P}$, przy czym przesunięcia te nie zmieniają relacji (48). Oznaczając przez T operację rzutowania na płaszczyznę Σ mamy dla dowolnego $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{x,y}^2$

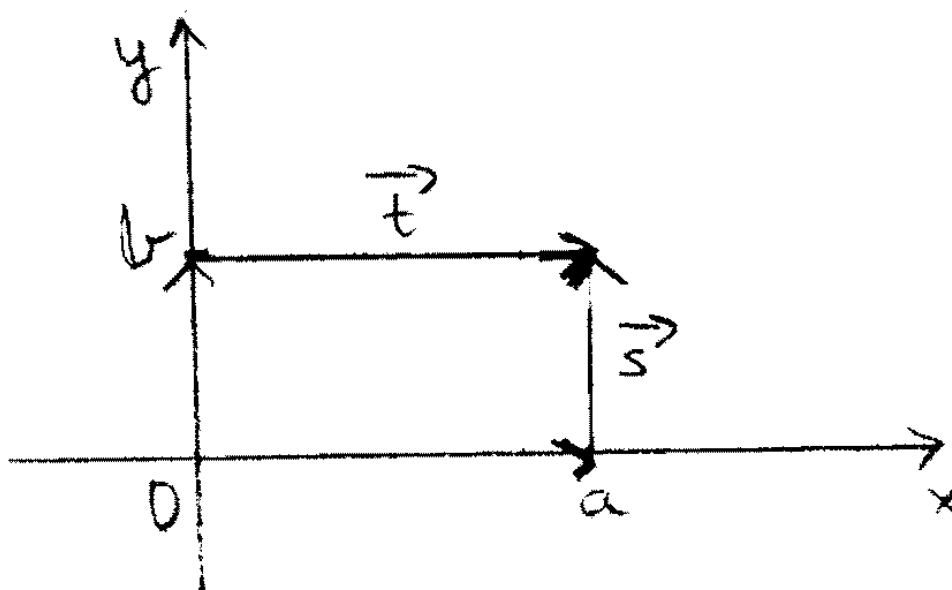
$$T(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta, -\frac{1}{C}(A\alpha + B\beta)),$$

zatem

$$T(0,0) = (0,0), \quad T(a,0) = (a,0,-\frac{Aa}{C}), \quad T(0,b) = (0,b,-\frac{Bb}{C}),$$

$$T(a,b) = (a,b,-\frac{1}{C}(Aa+Bb))$$

i wobec tego (rys. 48)



[rys. 48]

$$T\vec{Oa} = T\vec{t} = [a, 0, -\frac{A}{C}a] = \vec{v}$$

oraz

$$T\vec{Ob} = T\vec{s} = [0, b, -\frac{B}{C}b] = \vec{w}.$$

Z dwóch ostatnich równości widać, że Q jest równoległobokiem w płaszczyźnie Σ rozpiętym na wektorach $\vec{v}, \vec{w}$, wobec tego jego pole jest równe długości iloczynu wektorowego $\vec{v} \times \vec{w}$. Mamy

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & -\frac{A}{C}a \\ 0 & b & -\frac{B}{C}b \end{vmatrix}$$

czyli

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -\frac{A}{C} \\ 0 & 1 & -\frac{B}{C} \end{vmatrix} ab,$$

co po rozwinięciu wyznacznika według pierwszego wiersza daje

$$\vec{v} \times \vec{w} = ab \left[\frac{A}{C}, \frac{B}{C}, 1 \right].$$

Wobec tego

$$|Q| = |\vec{v} \times \vec{w}| = ab \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{C^2}},$$

skąd po uwzględnieniu (49) wynika (48). □

Przejdziemy teraz do obliczenia pola powierzchni S o równaniu

$$(50) \quad z = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{P},$$

gdzie $\mathbb{P}$ jest przedziałem domkniętym w płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ zaś funkcja f jest klasy $C^1(\mathbb{P})$. Ustalając podział

$$\Pi : \quad \mathbb{P} = \bigcup_{j=1}^k \mathbb{P}_j$$

przedziału $\mathbb{P}$ i punkty pośrednie $(\xi_j, \eta_j) \in \mathbb{P}_j$ ($j = 1, 2, \dots, k$) (por. rozdz. V punkt 2) oznaczmy przez Σ_j płaszczyznę styczną do powierzchni S w punkcie $p_j = (\xi_j, \eta_j, f(\xi_j, \eta_j))$. Wektor normalny do powierzchni S w punkcie p_j ma postać (por. rozdz. IV punkt 6)

$$(51) \quad \vec{n}_j = [f_x, f_y, -1](\xi_j, \eta_j).$$

Oznaczając przez Q_j rzut prostopadły do płaszczyzny $z = 0$ przedziału $\mathbb{P}_j$ na płaszczyznę Σ_j zaś przez γ_j kąt między wektorem $\vec{n}_j$ a dodatnią półosią z -ów mamy zgodnie z lematem

$$(52) \quad |Q_j| = \frac{|\mathbb{P}_j|}{|\cos \gamma_j|}$$

czyli, po uwzględnieniu (51),

$$(53) \quad |Q_j| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}(\xi_j, \eta_j) |\mathbb{P}_j|.$$

Równoległobok Q_j nazwiemy *elementem stycznym* w punkcie p_j . Łatwo zauważyć, że suma

$$\bigcup_{j=1}^k Q_j$$

wszystkich elementów stycznych odpowiadających podziałowi Π aproksymuje powierzchnię S zaś sumę pól tych elementów

$$\sum_{j=1}^k |Q_j|$$

możemy uważać za przybliżoną miarę pola powierzchni S , przy czym przybliżenie jest tym lepsze im mniejsza jest średnica podziału. Zgodnie z (53) sumę tę możemy zapisać w postaci

$$\sum_{j=1}^k |Q_j| = \sum_{j=1}^k \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}(\xi_j, \eta_j) |\mathbb{P}_j|$$

z której widać, że stanowi ona sumę przybliżoną całki podwójnej (por. rozdz. V punkt 2)

$$(54) \quad \iint_{\mathbb{P}} g(x, y) dx dy, \quad g(x, y) = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}.$$

Ponieważ założyliśmy, że f jest klasy $C^1(\mathbb{P})$, funkcja $g(x, y)$ jest ciągła w przedziale $\mathbb{P}$ i całka (54) istnieje. Zgodnie z przedstawioną intuicją geometryczną możemy przyjąć równość

$$(55) \quad |S| = \iint_{\mathbb{P}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

jako definicję pola powierzchni S określonej równaniem (50).

Podobne rozumowanie można przeprowadzić w przypadku ogólniejszym, gdy powierzchnia S określona jest równaniem

$$(56) \quad z = f(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{D},$$

gdzie $\mathbb{D}$ jest obszarem regularnym (rozdz. V punkt 4) zaś f jest klasy $C^1(\mathbb{D})$. Jako $\mathbb{P}$ przyjmujemy dowolnie ustalony przedział domknięty zawierający obszar $\mathbb{D}$ i z podziału Π wybieramy tylko te przedziały $\mathbb{P}_j$, które przecinają się z obszarem $\mathbb{D}$. Jeżeli przyjmiemy, że $p_j \in \mathbb{D} \cap \mathbb{P}_j$, to suma odpowiednich elementów stycznych aproksymuje powierzchnię S zaś sumę

$$\sum_j \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}(\xi_j, \eta_j) |\mathbb{P}_j|$$

możemy uważać za przybliżoną miarę pola powierzchni S . Suma ta jest przybliżoną sumą całki podwójnej

$$\iint_{\mathbb{D}} g(x, y) dx dy, \quad g(x, y) = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2},$$

przy czym funkcja $g(x, y)$ jest ciągła w obszarze $\mathbb{D}$, zatem całka istnieje. Wobec tego jako definicję pola powierzchni S określonej równaniem (56) możemy przyjąć uogólnienie wzoru (55) w postaci

$$(57) \quad |S| = \iint_{\mathbb{D}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.$$

Oznaczając przez $\gamma(x, y)$ kąt między normalną do powierzchni S w punkcie $(x, y, f(x, y))$ a dodatnią półosią z -ów mamy zgodnie z (51)

$$|\cos \gamma(x, y)| = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \quad ((x, y) \in \mathbb{D}),$$

wobec tego równość (57) można zapisać w postaci

$$(58) \quad |S| = \iint_{\mathbb{D}} \frac{dx dy}{|\cos \gamma(x, y)|}.$$

Wyrażenie różniczkowe

$$dS = \frac{dx dy}{|\cos \gamma(x, y)|}$$

nazywamy *elementem pola*. Jest to różniczkowy odpowiednik wzoru (52) określającego pole elementu stycznego.

Przykład 5. Niech S będzie częścią płaszczyzny

$$\Sigma : \quad Ax + by + Cz = D \quad (C \neq 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 = 1)$$

zawartą w walcu o tworzących równoległych do osi z -ów i podstawie $\mathbb{D}$ (zakładamy, że $\mathbb{D}$ jest obszarem regularnym w płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$). Ponieważ

$$|\cos \gamma(x, y)| = |C| = \text{const},$$

z (58) dostajemy

$$|S| = \frac{|\mathbb{D}|}{|\cos \gamma|}.$$

Powierzchnia S jest rzutem prostopadłym do płaszczyzny $z = 0$ obszaru $\mathbb{D}$ na płaszczyznę Σ , wobec tego otrzymana równość stanowi uogólnienie wzoru (58) udowodnionego w przypadku, gdy $\mathbb{D}$ jest przedziałem.

Przykład 6. Zastosujemy całkę podwójną do znalezienia pola powierzchni S powstałej przez obrót dookoła osi x -ów wykresu funkcji

$$y = g(x) > 0 \quad (a \leq x \leq b)$$

zakładając, że g jest klasy C^1 w przedziale $[a, b]$. Dla ustalonego $x \in [a, b]$ punkt $(x, y, z) \in S$ leży na okręgu o promieniu $g(x)$ i środku $(0, 0, x)$ w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny yz , spełnia zatem równanie

$$y^2 + z^2 = g^2(x).$$

Rozwiązując je względem z dostajemy dwa równania

$$z = \pm \sqrt{g^2(x) - y^2}$$

określające dwie przystające części S_+ , S_- powierzchni S . Wobec tego

$$(59) \quad |S| = 2|S_+|,$$

gdzie powierzchnia S_+ opisana jest równaniem

$$S_+ : \quad z = \sqrt{g^2(x) - y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{D},$$

zaś $\mathbb{D}$ jest obszarem domkniętym określonym nierównościami

$$\mathbb{D} : \quad a \leq x \leq b, \quad -g(x) \leq y \leq g(x).$$

Różniczkowanie daje

$$z_x = \frac{g(x)g'(x)}{\sqrt{g^2(x) - y^2}}, \quad z_y = \frac{-y}{\sqrt{g^2(x) - y^2}} \quad \text{dla} \quad -g(x) < y < g(x),$$

stąd

$$1 + z_x^2 + z_y^2 = \frac{g^2(1 + (g')^2)}{g^2 - y^2}.$$

Zauważmy, że w otrzymanym wyrażeniu mianownik jest równy zero dla $y = \pm g(x)$ czyli na części brzegu obszaru $\mathbb{D}$, wobec tego w rozważanym przykładzie funkcja podcałkowa we wzorze (57) nie jest ciągła w obszarze domkniętym $\mathbb{D}$. Możemy jednak zastosować ten wzór do obliczenia pola powierzchni S_+ traktując całkę po prawej stronie jako całkę niewłaściwą. Dla ustalonego $\eta \in (0, 1)$ wprowadźmy obszar

$$\mathbb{D}_\eta : \quad a \leq x \leq b, \quad -\eta g(x) \leq y \leq \eta g(x)$$

i przyjmijmy, że

$$(60) \quad |S_+| = \lim_{\eta \rightarrow 1^-} J(\eta), \quad \text{gdzie} \quad J(\eta) = \iint_{\mathbb{D}_\eta} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy.$$

Zamieniając całkę podwójną na całkę iterowaną (por. Twierdzenie 8 rozdz. V) dostajemy

$$J(\eta) = \int_a^b g \sqrt{1 + (g')^2} A_\eta(x) \, dx,$$

gdzie

$$A_\eta(x) = \int_{-\eta g(x)}^{\eta g(x)} \frac{dy}{\sqrt{g^2(x) - y^2}}, \quad (a \leq x \leq b).$$

Przy ustalonym x podstawienie

$$y = g(x)t$$

daje

$$A_\eta(x) = \int_{-\eta}^{\eta} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \left[\arcsin t \right]_{-\eta}^{\eta}.$$

Zatem $A_\eta(x) = A_\eta$ jest stałą niezależną od x , stąd

$$J(\eta) = A_\eta \int_a^b g \sqrt{1 + (g')^2} dx$$

i wobec tego zgodnie z (59), (60)

$$(61) \quad |S| = 2\pi \int_a^b g \sqrt{1 + (g')^2} dx.$$

Otrzymany wzór, określający pole powierzchni obrotowej, jest wyprowadzany w początkowym kursie analizy w sposób bardziej elementarny, bez użycia całki podwójnej.

Przykład 7. Zastosujemy wzór (61) do obliczenia pola powierzchni bocznej stożka ściętego. Powierzchnię taką otrzymujemy obracając dokoła osi x -ów odcinek prostej

$$y = mx + c \quad (a \leq x \leq b),$$

przy czym otrzymany stożek ścięty ma promienie podstaw

$$r = g(a), \quad R = g(b),$$

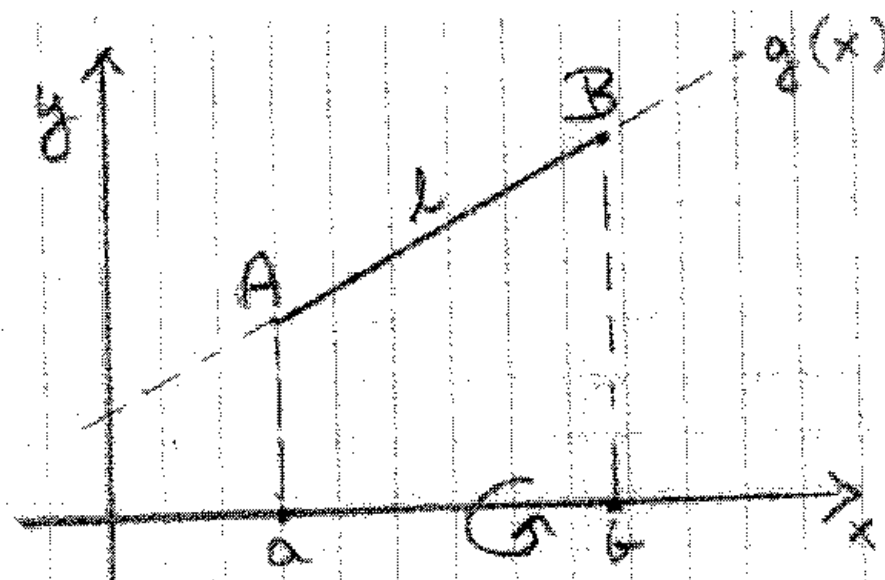
gdzie

$$g(x) = mx + c$$

i tworzącą

$$l = |AB| = (b - a) \sqrt{1 + m^2}$$

(rys. 49).



[rys. 49]

Stosując wzór (61) dostajemy

$$|S| = 2\pi\sqrt{1+m^2} \int_a^b (mx+c) dx$$

skąd, po obliczeniu całki,

$$|S| = \frac{2\pi l}{b-a} \left[\frac{m}{2}(b^2-a^2) + c(b-a) \right].$$

Prosty rachunek daje ostateczny wynik

$$|S| = \pi l(r+R)$$

- jest to wzór znany Czytelnikowi z kursu szkolnego.

4. Pole powierzchni opisanej równaniami parametrycznymi.

Zacniemy od uwagi nie związanej z omawianym zagadnieniem. Niech $y = f(x)$ będzie funkcją jednej zmiennej klasy C^1 w przedziale (a, b) i niech

$$f'(x_0) \neq 0 \quad (a < x_0 < b).$$

Z ciągłości pochodnej $f'(x_0)$ wynika, że w pewnym otoczeniu ω punktu x_0 zachodzi jedna z nierówności

$$f(x) > 0 \quad \text{lub} \quad f(x) < 0 \quad (x \in \omega).$$

Oznacza to, że funkcja f jest ściśle monotoniczna w przedziale ω i wobec tego istnieje funkcja odwrotna do niej $x = g(y)$ określona w pewnym otoczeniu punktu $y_0 = f(x_0)$. W początkowym kursie analizy matematycznej dowodzi się, że funkcja g jest klasy C^1 .

Uwaga ta daje się uogólnić na przypadek, gdy zamiast funkcji jednej zmiennej rozważamy układ funkcji wielu zmiennych. Podamy bez dowodu

Twierdzenie 3 (o odwzorowaniu odwrotnym). *Rozważmy układ równań*

$$(62) \quad x = p(u, v), \quad y = q(u, v)$$

i niech

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} p_u & p_v \\ q_u & q_v \end{vmatrix}.$$

Założmy, że

1^o funkcje p, q są klasy C^1 w pewnym obszarze płaszczyzny $\mathbb{R}_{u,v}^2$;

2^o $J(u_0, v_0) \neq 0$

i przyjmijmy, że

$$x_0 = p(u_0, v_0), \quad y_0 = q(u_0, v_0).$$

Wówczas w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) układ (62) ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$(63) \quad u = P(x, y), \quad v = Q(x, y),$$

przy czym funkcje P, Q są klasy C^1 .

Uwaga. Równania (63) określają odwzorowanie otoczenia punktu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_{x,y}^2$ w płaszczyznę $\mathbb{R}_{u,v}^2$, które nazywamy *odwzorowaniem odwrotnym* do odwzorowania (62) - stąd nazwa twierdzenia.

Przykład 8. Załóżmy, że (62) jest układem równań liniowych

$$(64) \quad x = au + bv, \quad y = cu + dv,$$

wówczas

$$J = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

jest wyznacznikiem układu (64) i warunek $J \neq 0$ zapewnia jednoznaczność rozwiązalność tego układu.

Niech Ω będzie zbiorem otwartym w płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Modyfikując definicję podaną w punkcie 2 przyjmujemy, że odwzorowanie Φ jest *dyfeomorfizmem w zbiorze Ω* , jeżeli spełnia warunki (i), (ii), (iii) z zastąpieniem $\mathbb{B}$ przez Ω .

Z twierdzenia 3 wynika, że odwzorowanie (62) przekształca wzajemnie jednoznacznie pewne otoczenie ω punktu (u_0, v_0) na otoczenie punktu (x_0, y_0) . Zmniejszając ewentualnie otoczenie ω możemy założyć, że $J(u, v) \neq 0$ dla $(u, v) \in \omega$. Wobec tego twierdzeniu 3 można nadać inne, równoważne sformułowanie :

Twierdzenie 3'. *Przy założeniach twierdzenia 3 odwzorowanie określone równaniami (62) jest dyfeomorfizmem w pewnym otoczeniu punktu (u_0, v_0) .*

Przejdziemy teraz do obliczenia pola powierzchni S opisanej równaniami parametrycznymi klasy C^1 (por. rozdz. IV punkt 7)

$$(65) \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Omega,$$

gdzie Ω jest obszarem w płaszczyźnie $\mathbb{R}_{u,v}^2$ i niech

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}.$$

Założmy, że $J(u_0, v_0) \neq 0$ dla pewnego $(u_0, v_0) \in \Omega$ i przyjmijmy oznaczenia

$$x_0 = x(u_0, v_0), \quad y_0 = y(u_0, v_0), \quad z_0 = z(u_0, v_0).$$

Zgodnie z twierdzeniem 3 pierwsze dwa równania (65) mają w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) rozwiązanie klasy C^1

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Podstawiając to rozwiązanie do trzeciego równania (65) otrzymujemy opis części S_0 powierzchni S zawartej w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0, z_0) w postaci

$$(66) \quad z = f(x, y),$$

gdzie f jest funkcją klasy C^1 . Zgodnie z twierdzeniem 3' odwzorowanie Φ określone przez pierwsze dwa równania (65) jest dyfeomorfizmem w pewnym obszarze domkniętym $\mathbb{IB} \subset \mathbb{R}_{u,v}^2$ zawierającym we wnętrzu punkt (u_0, v_0) . Zmniejszając ewentualnie powierzchnię S_0 możemy założyć, że jest ona określona równaniem (66), gdzie $(x, y) \in \mathbb{ID} = \Phi(\mathbb{IB})$. Pole powierzchni S_0 można obliczyć stosując wzór (58). Jak wykazaliśmy w rozdz. IV punkt 7, występujące w tym wzorze wyrażenie $|\cos \gamma(x, y)|$ możemy wyznaczyć z opisu parametrycznego (65). Oznaczając przez F odwzorowanie obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}_{u,v}^2$ w przestrzeń $\mathbb{R}_{x,y,z}^3$ określone wzorami (65) wprowadźmy macierz

$$F'(u, v) = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} (u, v)$$

(zwaną *pochodną odwzorowania F*) i oznaczmy przez Δ_j wyznacznik powstały z macierzy F' przez skreślenie j -tego wiersza. Wektor

$$\vec{n} = [\Delta_1, -\Delta_2, \Delta_3]$$

jest wektorem normalnym do powierzchni S_0 w punkcie $F(u, v)$, wobec tego wprowadzając wyrażenie (zwane *modułem macierzy F'*)

$$(67) \quad |F'(u, v)| = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2}(u, v)$$

mamy

$$(68) \quad |\cos \gamma(x, y)| = \frac{|\Delta_3(u, v)|}{|F'(u, v)|} \quad \text{gdzie} \quad (x, y, f(x, y)) = F(u, v),$$

przy czym $\Delta_3(u, v) \neq 0$ dla $(u, v) \in \mathbb{IB}$. Zakładając, że obszary $\mathbb{IB}, \mathbb{ID}$ są regularne, możemy do całki we wzorze (58) zastosować twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie (twierdzenie 1). Zauważmy, że wyznacznik Δ_3 jest jacobianem odwzorowania Φ , wobec tego po uwzględnieniu (68) dostajemy

$$|S_0| = \iint_{\mathbb{IB}} \frac{|F'(u, v)|}{|\Delta_3(u, v)|} |\Delta_3(u, v)| du dv$$

czyli po skróceniu

$$(69) \quad |S_0| = \iint_{\mathbb{IB}} |F'(u, v)| du dv.$$

Oczywiście w przeprowadzonym rozumowaniu można zamienić role zmiennych x, y, z . Wystarczy wobec tego założyć, że w każdym punkcie $(u, v) \in \Omega$ przynajmniej jeden z wyznaczników Δ_j ($j = 1, 2, 3$) jest różny od zera czyli że macierz F' ma maksymalny rząd (równy 2) w całym obszarze Ω . Z przeprowadzonych rozważań wynika, że wzór (69) możemy stosować do obliczenia pola dostatecznie małej części S_0 powierzchni S . Wzór ten stanowi inny zapis wzoru (58) (zastąpieniem S przez S_0), który, jak wykazaliśmy w punkcie 3, odpowiada naszej intuicji geometrycznej pola powierzchni. Wobec tego przyjmujemy w dalszym ciągu następującą regułę obliczania pola powierzchni S określonej równaniami parametrycznymi:

Reguła. Zakładamy, że

1^o powierzchnia S ma opis parametryczny klasy C^1

$$S : x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \mathbb{B},$$

gdzie $\mathbb{B}$ jest obszarem regularnym w płaszczyźnie $\mathbb{R}_{u,v}^2$ (por. rozdz. V punkt 4);

2^o macierz

$$F'(u, v) = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} (u, v)$$

ma maksymalny rząd (równy 2) dla $(u, v) \in \mathbb{B}$.

Wówczas przyjmujemy, że

$$(70) \quad |S| = \iint_{\mathbb{B}} |F'(u, v)| \, du \, dv$$

czyli, zgodnie z (67),

$$(71) \quad |S| = \iint_{\mathbb{B}} \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2} \, du \, dv.$$

Uwaga. Jeżeli powierzchnia S jest określona równaniem (56), to ma opis parametryczny

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v)$$

i wzór (71) przyjmuje wówczas postać (57) (proste sprawdzenie pozostawiamy Czytelnikowi.)

Przykład 9. Korzystając z podanej reguły obliczymy pole powierzchni kuli (czyli sfery) S o promieniu a . Jak pokazaliśmy w rozdz. IV (Przykład 18), powierzchnię tę można opisać równaniami parametrycznymi

$$(72) \quad \begin{aligned} z &= a \cos \phi \cos \theta, & y &= a \cos \phi \sin \theta, & x &= a \sin \phi, \\ (0 \leq \theta \leq 2\pi, & & -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}), \end{aligned}$$

gdzie ϕ jest kątem, jaki tworzy wektor $\vec{r} = [x, y, z]$ z płaszczyzną $\mathbb{R}_{x,y}^2$, zaś θ jest kątem utworzonym przez rzut prostopadły $\vec{r}'$ wektora $\vec{r}$ na płaszczyznę $\mathbb{R}_{x,y}^2$ z dodatnią półosią x -ów (por. rys. 25). Mamy (por. rozdz. IV Przykład 19)

$$F'(\phi, \theta) = \begin{bmatrix} -a \sin \phi \cos \theta, & -a \cos \phi \sin \theta \\ -a \sin \phi \sin \theta, & a \cos \phi \cos \theta \\ a \cos \phi, & 0 \end{bmatrix}.$$

zatem

$$(73) \quad |F'(\phi, \theta)| = a^2 \cos \phi.$$

Zauważmy, że dla $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ (czyli w punktach $(0, 0, \pm a)$ będących biegunami sfery) macierz F' nie spełnia warunku 2^0 , wobec tego zastosujemy wzór (70) do obliczenia pola części $S_{\alpha, \beta}$ sfery zawartej między równoleżnikami $\phi = \alpha$ oraz $\phi = \beta$ ($-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$). Uwzględniając (73) i zamieniając całkę podwójną na całkę iterowaną dostajemy

$$|S_{\alpha, \beta}| = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\alpha}^{\beta} a^2 \cos \phi d\phi$$

czyli, po obliczeniu całki,

$$|S_{\alpha, \beta}| = 2\pi a^2 (\sin \beta - \sin \alpha).$$

Przechodząc do granicy przy $\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}$, $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ dostajemy stąd znany wzór na pole powierzchni kuli

$$|S| = 4\pi a^2.$$

Przykład 10. Niech S będzie powierzchnią powstałą przez obrótokoła osi x -ów wykresu funkcji

$$y = g(x) > 0 \quad (a \leq x \leq b).$$

Obliczymy ponownie pole powierzchni S (por. Przykład 6) korzystając tym razem ze wzoru (70). Dla ustalonego x punkt $(x, y, z) \in S$ przebiega podczas obrotu okrąg o promieniu $g(x)$ i środka $(0, 0, x)$ w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny yz , zatem opis parametryczny powierzchni S ma postać

$$F : \quad \begin{aligned} x &= x, & y &= g(x) \cos \theta, & z &= g(x) \sin \theta, \\ a &\leq x \leq b, & 0 &\leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Zakładając, że g jest klasy C^1 w przedziale $[a, b]$ mamy

$$F' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g' \cos \theta & -g \sin \theta \\ g' \sin \theta & g \cos \theta \end{bmatrix},$$

wobec tego

$$\Delta_1 = g'g, \quad \Delta_2 = g \cos \theta, \quad \Delta_3 = -g \sin \theta$$

i stąd zgodnie ze wzorem (67)

$$|F'| = g\sqrt{1 + (g')^2}.$$

Po zamianie całki podwójnej na całkę iterowaną wzór (70) daje

$$|S| = 2\pi \int_a^b g\sqrt{1 + (g')^2} dx$$

czyli wzór (61).

Zadania.

1. Narysować obszar $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}_{x,y}^2$, następnie stosując odpowiednią zamianę zmiennych obliczyć całkę

$$\iint_{\mathbb{D}} f(x, y) dx dy,$$

jeżeli

$$\text{a.) } \mathbb{D} : \quad 0 \leq x - y \leq 1, \quad 1 \leq x + y \leq 2, \quad f(x, y) = x^2 - y^2;$$

$$\text{b.) } \mathbb{D} : \quad 0 \leq x + 2y \leq 1, \quad e \leq x - y \leq e^2, \quad f(x, y) = \frac{x + 2y}{x - y}.$$

2. Narysować obszar $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}_{x,y}^2$ i obliczyć całkę

$$\iint_{\mathbb{D}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

jeżeli

a.) $\mathbb{D}$ jest pierścieniem ograniczonym okręgami o środku w początku układu i promieniach a, b ($0 < a < b$);

b.) $\mathbb{D}$ jest sumą obszarów $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2$ określonych nierównościami

$$\mathbb{D}_1 : \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq a, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \mathbb{D}_2 : \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq b, \quad x \leq 0.$$

3. Niech $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}_{x,y}^2$ będzie obszarem zawartym w półpłaszczyźnie $y \geq 0$ i ograniczonym osią x -ów oraz spiralą określoną we współrzędnych biegunowych równaniem

$$\text{a.) } r = \theta, \quad \text{b.) } r = e^\theta.$$

Narysować obszar $\mathbb{D}$ i obliczyć całkę

$$\iint_{\mathbb{D}} (x^2 + y^2) dx dy.$$

4. Używając całki podwójnej i współrzędnych biegunowych obliczyć objętość
- walca kołowego i stożka kołowego o wysokości h i promieniu podstawy a ,
 - kuli o promieniu a .
5. Niech K będzie kulą o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 1. Obliczyć objętość bryły W , jeśli W jest
- częścią K leżącą w obszarze domkniętym $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;
 - częścią K leżącą w obszarze domkniętym $x \geq 0, y \geq 0$;
 - przekrojem K , półprzestrzeni $z \geq 0$ i stożka $x^2 + y^2 \leq z^2$;
 - częścią K ograniczoną płaszczyznami $z = c$ i $z = d$ ($0 < c < d < 1$).
6. Obliczyć objętość bryły W , jeśli W jest
- bryłą powstałą przez usunięcie stożka

$$3(x^2 + y^2) < z^2$$

z półkuli

$$z \geq 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 9;$$

b.) bryłą ograniczoną sferami

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{ i } \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

oraz stożkiem

$$x^2 + y^2 = z^2;$$

c.) bryłą ograniczoną z góry przez sferę

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z$$

a z dołu przez stożek

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

7. Niech $\mathbb{D}_R$ będzie obszarem określonym nierównościami

$$\text{a.) } 1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, \quad \text{b.) } \frac{1}{R^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$

Zbadać, dla jakich wartości α istnieje granica

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{\mathbb{D}_R} (x^2 + y^2)^{-\frac{\alpha}{2}} dx dy.$$

8. Obliczyć pole powierzchni S o równaniu

$$(74) \quad z = x^2 + y^2 \quad (x, y) \in \mathbb{D},$$

jeżeli $\mathbb{D}$ jest obszarem domkniętym określonym nierównościami

$$\text{a.) } x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq 0; \quad \text{b.) } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9.$$

Jaką powierzchnię opisuje równanie (74)?

9. Oznaczając przez Φ odwzorowanie

$$\Phi: \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

płaszczyzny $\mathbb{R}_{r,\theta}^2$ w płaszczyznę $\mathbb{R}_{x,y}^2$ przyjmiemy, że $\mathbb{B}_a$ ($a > 0$) jest przedziałem określonym nierównościami

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mathbb{B}_a: \quad & 0 < r_0 - a \leq r \leq r_0 + a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ \text{(ii)} \quad \mathbb{B}_a: \quad & 0 < r_0 - a \leq r \leq r_0 + a, \quad 0 < \theta_0 - a \leq \theta \leq \theta_0 + a < 2\pi \end{aligned}$$

zaś $\mathbb{D}_a = \Phi(\mathbb{B}_a)$. Narysować obszar $\mathbb{D}_a$ i obliczyć iloraz

$$\frac{|\mathbb{D}_a|}{|\mathbb{B}_a|},$$

wynik porównać ze wzorem (47) i Uwagą 4.

10. Niech Ω będzie obszarem w płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ i niech $\mathbb{D} = \overline{\Omega}$. Udowodnić, że funkcja $g(x, y)$ ciągła i różna od zera w obszarze domkniętym $\mathbb{D}$ ma w tym obszarze stały znak. Wskazówka. Zaprzeczając tezę zauważyć, że istnieją punkty $(x_j, y_j) \in \Omega$ ($j = 1, 2$) takie, że

$$g(x_1, y_1) > 0, \quad g(x_2, y_2) < 0.$$

Następnie skorzystać z definicji obszaru (rozdz. V punkt 4) i z warunku Darboux dla funkcji jednej zmiennej.