

# Całka funkcji trzech zmiennych

## 1. Całka potrójna na przedziale i na obszarze regularnym.

Przedziałem domkniętym  $\mathbb{P}$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  nazywamy zbiór punktów  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  określony nierównościami

$$(1) \quad a \leq x \leq a', \quad b \leq y \leq b', \quad c \leq z \leq c' \quad (a < a', \quad b < b', \quad c < c').$$

Przedział  $\mathbb{P}$  jest więc prostopadłościanem o krawędziach równoległych do osi układu współrzędnych. Jego objętość  $|\mathbb{P}|$  wyraża się wzorem

$$|\mathbb{P}| = (a - a')(b - b')(c - c').$$

Całkę potrójną funkcji  $f(x, y, z)$  na przedziale domkniętym  $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^3$  określimy w podobny sposób, jak całkę funkcji dwóch zmiennych na przedziale płaskim (por. rozdz. V punkt 2).

Wnętrzem przedziału  $\mathbb{P}$  (por. rozdz. III punkt 5) jest przedział otwarty określony przez nierówności ostre

$$a < x < a', \quad b < y < b', \quad c < z < c'.$$

Przez podział  $\Pi$  przedziału domkniętego  $\mathbb{P}$  rozumiemy przedstawienie go w postaci sumy

$$\Pi : \quad \mathbb{P} = \bigcup_{j=1}^k \mathbb{P}_j,$$

gdzie  $\mathbb{P}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) są przedziałami domkniętymi o rozłącznych wnętrzach. Obierając, przy ustalonym podziale  $\Pi$ , punkty pośrednie

$$p_j = (\xi_j, \eta_j, \zeta_j) \in \mathbb{P}_j \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

możemy dla funkcji  $f(x, y, z)$  określonej w przedziale  $\mathbb{P}$  utworzyć sumę przybliżoną

$$S(f, \Pi, p(\Pi)) = \sum_{j=1}^k f(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) |\mathbb{P}_j|$$

Podobnie, jak w przypadku płaskim, średnicą dowolnego zbioru  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$  nazywamy liczbę

$$\text{diam } \mathbb{D} = \sup_{p, q \in \mathbb{D}} d(p, q),$$

gdzie  $d(p, q)$  oznacza odległość punktów  $p, q$  (por. rozdz. I punkt 3). Średnicą prostopadłościanu  $\mathbb{P}$  jest długość jego przekątnej

$$\text{diam } \mathbb{P} = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2 + (c' - c)^2}.$$

Średnicę podziału  $\Pi$  określamy jako

$$d(\Pi) = \max_j \text{diam } \mathbb{P}_j,$$

zaś ciąg  $\{\Pi_n\}$  podziałów przedziału  $\mathbb{P}$  spełniający warunek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\Pi_n) = 0$$

nazywamy *ciągami normalnymi podziałów*.

Mówimy, że funkcja  $f(x, y, z)$  jest *całkowalna na przedziale domkniętym*  $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^3$ , jeżeli istnieje liczba  $G$  spełniająca warunek

$$G = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \Pi_n, p(\Pi_n))$$

dla dowolnego ciągu normalnego podziałów  $\{\Pi_n\}$  i dowolnego obioru punktów pośrednich  $p(\Pi_n)$ . Liczbę  $G$  nazywamy *całką potrójną funkcji*  $f(x, y, z)$  *na przedziale*  $\mathbb{P}$  i oznaczamy symbolem

$$\iiint_{\mathbb{P}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Wobec tego

$$(2) \quad \iiint_{\mathbb{P}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, \Pi_n, p(\Pi_n)),$$

gdzie  $\{\Pi_n\}$  jest dowolnie obranym ciągiem normalnym podziałów przedziału  $\mathbb{P}$  zaś  $p(\Pi_n)$  oznacza dowolnie obrany układ punktów pośrednich odpowiadający podziałowi  $\Pi_n$ .

Podamy bez dowodu odpowiednik twierdzenia 1 rozdz. V:

**Twierdzenie 1.** *Funkcja*  $f(x, y, z)$  *określona i ograniczona w przedziale domkniętym*  $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^3$  *jest całkowalna na tym przedziale, jeżeli spełnia jeden z następujących warunków:*

- (i) *f jest ciągła w przedziale*  $\mathbb{P}$ ;
- (ii) *punkty nieciągłości funkcji f leżą na powierzchni*  $S \subset \mathbb{P}$  *określonej (po ewentualnej zamianie zmiennych) równaniem*  $z = g(x, y)$ , *gdzie g jest funkcją ciągłą w pewnym płaskim obszarze regularnym (por. rozdz. V punkt 4);*

(iii) punkty nieciągłości funkcji  $f$  leżą w zbiorze będącym sumą skończonej ilości powierzchni opisanych w punkcie (ii).

Niech  $\mathbb{ID} \subset \mathbb{R}^3$  będzie ograniczonym obszarem domkniętym (por. rozdz. V punkt 4). Mówimy, że  $\mathbb{ID}$  jest *obszarem regularnym*, jeżeli jego brzeg (por. rozdz. III punkt 5) jest sumą skończonej ilości powierzchni opisanych w punkcie (ii) twierdzenia 1.

**Uwaga:** cytowane definicje dotyczą obszarów płaskich, przenoszą się jednak łatwo na przypadek przestrzenny - dokładne sformułowanie pozostawiamy Czytelnikowi.

Określimy teraz całkę potrójną na obszarze regularnym  $\mathbb{ID}$  postępując podobnie, jak w przypadku dwóch zmiennych. Zakładając, że funkcja  $f(x, y, z)$  jest ciągła w  $\mathbb{ID}$  przyjmujemy

$$f_0(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{dla } (x, y) \in \mathbb{ID}, \\ 0 & \text{dla } (x, y) \notin \mathbb{ID} \end{cases}$$

oraz

$$(3) \quad \iiint_{\mathbb{ID}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\mathbb{IP}} f_0(x, y, z) dx dy dz,$$

gdzie  $\mathbb{IP}$  jest dowolnym przedziałem domkniętym zawierającym obszar  $\mathbb{ID}$ . Ponieważ  $f_0$  może być nieciągła jedynie na brzegu obszaru  $\mathbb{ID}$ , całka po prawej stronie (3) istnieje zgodnie z twierdzeniem 1 (iii). Łatwo również okazać, że całka ta nie zależy od wyboru przedziału.

Wszystkie twierdzenia udowodnione w rozdziale V dla całki podwójnej przenoszą się na przypadek całki potrójnej. Omówimy dokładniej odpowiedniki twierdzeń 6, 6' oraz twierdzeń 8, 9 o zamianie całki na całkę iterowaną. Modyfikacja dowodu twierdzenia 6 daje

**Twierdzenie 2.** Jeżeli funkcja  $f(x, y, z)$  jest ciągła w przedziale domkniętym  $\mathbb{IP} \subset \mathbb{R}^3$  określonym nierównościami (1), to

$$(4) \quad \iiint_{\mathbb{IP}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^{a'} \left[ \int_b^{b'} \left( \int_c^{c'} f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx.$$

Wygodniejszy, bez użycia nawiasów, zapis równości (4) ma postać (por. Uwaga po twierdzeniu 7 rozdz. V)

$$(4') \quad \iiint_{\mathbb{IP}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^{a'} dx \int_b^{b'} dy \int_c^{c'} f(x, y, z) dz.$$

W równościach (4), (4') można oczywiście zamienić role zmiennych  $x, y, z$ . Wynika stąd, że całka iterowana po prawej stronie nie zależy od kolejności wykonywanych całkowań.

**Przykład 1.** Opierając się na równościach (4), (4') obliczymy całkę potrójną

$$A = \iiint_{\mathbb{IP}} (x + y + z) dx dy dz,$$

gdzie  $\mathbb{I}\mathbb{P}$  jest przedziałem określonym nierównościami

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c.$$

Całkując względem  $z$  przy chwilowo ustalonych  $x, y$  dostajemy

$$\int_0^c (x + y + z) dz = c(x + y) + \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^c,$$

zatem

$$\int_0^c (x + y + z) dz = c(x + y) + \frac{1}{2}c^2.$$

Ustalając chwilowo  $x$  całkujemy otrzymaną równość względem  $y$ , co daje

$$\int_0^b dy \int_0^c (x + y + z) dz = bcx + \frac{1}{2}bc^2 + \frac{1}{2}b^2c.$$

Obustronne całkowanie względem  $x$  ostatniej równości daje

$$A = \frac{1}{2}(a^2bc + ab^2c + abc^2).$$

Mówimy, że obszar domknięty  $\mathbb{I}\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$  jest *normalny względem płaszczyzny  $xy$* , jeżeli jest określony przez warunki

$$(5) \quad g(x, y) \leq z \leq h(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{I}\mathbb{D}^*,$$

gdzie  $\mathbb{I}\mathbb{D}^*$  jest obszarem regularnym w płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  a funkcje  $g, h$  są ciągłe w  $\mathbb{I}\mathbb{D}^*$ . Z podanej definicji wynika, że obszar  $\mathbb{I}\mathbb{D}^*$  jest rzutem prostopadłym obszaru  $\mathbb{I}\mathbb{D}$  na płaszczyznę  $xy$ . Zamieniając role zmiennych określamy podobnie obszar normalny względem pozostałych płaszczyzn układu współrzędnych.

Łatwo sprawdzić, że obszar normalny względem jednej z płaszczyzn układu współrzędnych jest obszarem regularnym, wobec tego możemy rozważać całkę funkcji ciągłej na takim obszarze. Rozumując podobnie, jak w dowodzie twierdzenia 8 rozdz. V otrzymujemy

**Twierdzenie 3.** *Jeżeli funkcja  $f(x, y, z)$  jest ciągła w obszarze  $\mathbb{I}\mathbb{D}$  normalnym względem płaszczyzny  $xy$  określonym przez warunki (5), to*

$$(6) \quad \iiint_{\mathbb{I}\mathbb{D}} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\mathbb{I}\mathbb{D}^*} \left( \int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

**Uwaga.** Całka względem zmiennej  $z$  po prawej stronie (6) jest całką zależną od parametrów  $x, y$ . W początkowym kursie analizy dowodzi się, że całka taka jest ciągłą funkcją zmiennych  $x, y$  przy założeniu, że funkcje  $f, g, h$  są ciągłe, wobec tego całka podwójna po obszarze  $\mathbb{I}\mathbb{D}^*$  po prawej stronie (6) istnieje.

Załóżmy teraz, że  $\mathbb{D}^*$  jest obszarem normalnym względem osi  $x$ -ów opisanym nierównościami

$$a \leq x \leq b, \quad p(x) \leq y \leq q(x),$$

gdzie funkcje  $p, q$  są ciągłe w przedziale  $[a, b]$  oraz  $p(x) < q(x)$  dla  $a < x < b$ . Opierając się na twierdzeniu 8 rozdz. V możemy równość (6) zapisać w postaci

$$(7) \quad \iiint_{\mathbb{D}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[ \int_{p(x)}^{q(x)} \left( \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right] dx$$

lub, bez użycia nawiasów, jako

$$(7') \quad \iiint_{\mathbb{D}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{p(x)}^{q(x)} dy \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

Zamieniając role zmiennych możemy w podobny sposób sprowadzić do całki iterowanej całkę potrójną z funkcji ciągłej na obszarze normalnym względem dowolnej z płaszczyzn układu współrzędnych.

Rozważmy teraz sytuację gdy funkcja  $f(x, y, z)$  jest stała, równa 1. Wówczas dla dowolnego podziału  $\Pi$  przedziału  $\mathbb{P}$  i dowolnie obranych punktów pośrednich  $p(\Pi)$  mamy

$$S(f, \Pi, p(\Pi)) = |\mathbb{P}|$$

i wobec tego zgodnie z (2)

$$\iiint_{\mathbb{P}} dx dy dz = |\mathbb{P}|.$$

W przypadku dowolnego obszaru regularnego  $\mathbb{D}$  suma przybliżona

$$S(f_0, \Pi, p(\Pi))$$

jest równa objętości bryły złożonej z przedziałów, przy czym bryła ta aproksymuje obszar  $\mathbb{D}$  tym lepiej, im mniejsza jest średnica podziału  $\Pi$ . Opierając się na definicji (3) możemy wobec tego przyjąć, że objętość obszaru regularnego  $\mathbb{D}$  wyraża się wzorem

$$(8) \quad |\mathbb{D}| = \iiint_{\mathbb{D}} dx dy dz.$$

**Przykład 2.** Obliczymy objętość obszaru  $\mathbb{D}$  ograniczonego płaszczyznami

$$x = 0, \quad y = 1, \quad z = 0,$$

płaszczyzną  $P$  o równaniu

$$x + y - z + 1 = 0$$

i powierzchnią walcową określoną równaniem

$$y = x^2 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Płaszczyzna  $P$  przecina płaszczyznę  $xy$  wzdłuż prostej  $l$  o równaniu

$$x + y + 1 = 0,$$

przy czym dla  $x \geq 0, y \geq 0$  mamy

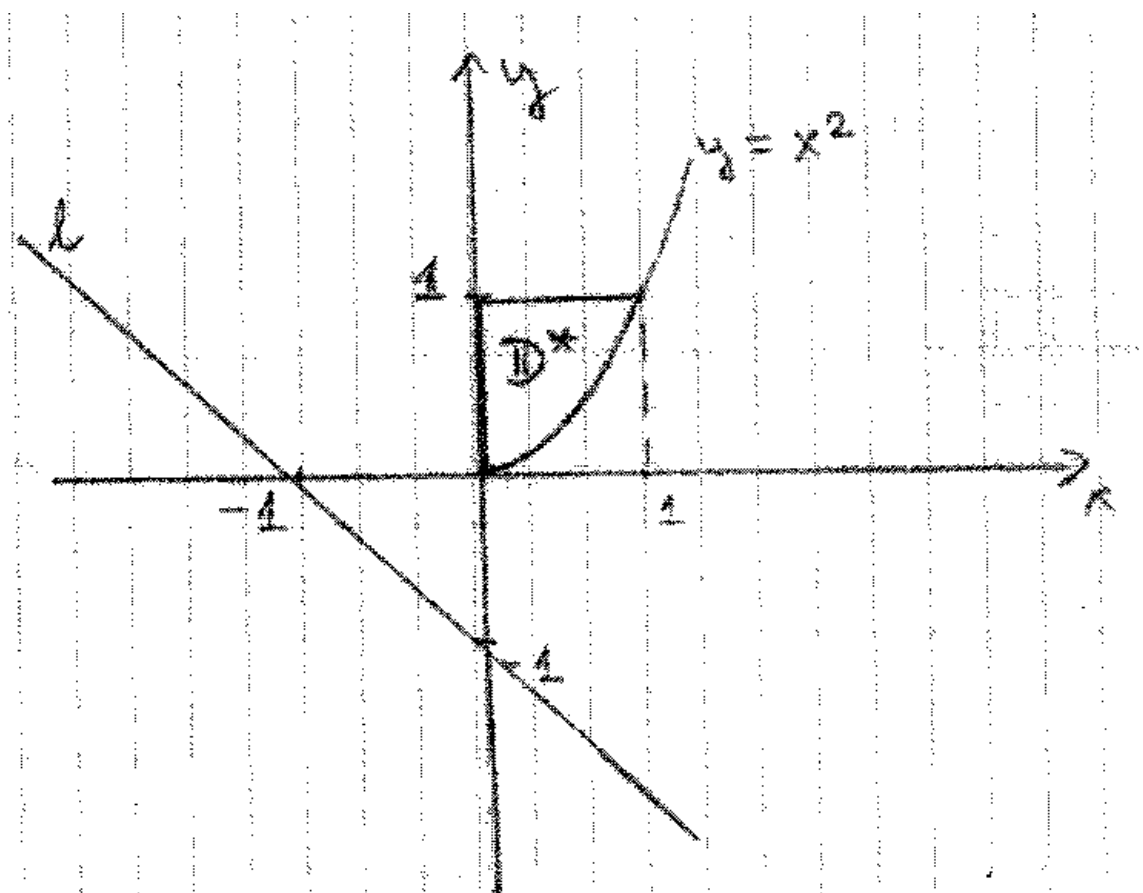
$$z = x + y + 1 > 0.$$

Wobec tego obszar przestrzenny  $\mathbb{ID}$  jest obszarem normalnym określonym przez warunki

$$0 \leq z \leq x + y + 1, \quad (x, y) \in \mathbb{ID}^*,$$

gdzie  $\mathbb{ID}^*$  (por. rys. 50) jest obszarem płaskim, normalnym względem osi  $x$ -ów, określonym przez nierówności

$$0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq 1.$$



[rys. 50]

Zgodnie z (8) i regułą (7') mamy zatem

$$|\mathbb{ID}| = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^{x+y+1} dz$$

i wykonując kolejno całkowania otrzymujemy

$$|\mathbb{D}| = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 (x+y+1) dy = \int_0^1 \left[ (x+1)y + \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=x^2}^{y=1} dx$$

zatem

$$|\mathbb{D}| = \int_0^1 \left( -\frac{1}{2}x^4 - x^3 - x^2 + x + \frac{3}{2} \right) dx.$$

Po obliczeniu ostatniej całki dostajemy

$$|\mathbb{D}| = \left[ -\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x \right]_0^1 = \frac{79}{60}.$$

## 2. Zamiana zmiennych w całce potrójnej.

Rozumowania dotyczące całki podwójnej przenoszą się łatwo na całkę potrójną. W dalszym ciągu będziemy opierać się na definicjach podanych w rozdz. VII punkt 2 dotyczących funkcji dwóch zmiennych i obszarów płaskich. Łatwo przenieść je na przypadek przestrzenny; proponujemy, by Czytelnik zrobił to samodzielnie jako ćwiczenie.

Rozważmy odwzorowanie

$$\Phi : x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w)$$

z przestrzeni  $\mathbb{R}_{u,v,w}^3$  w przestrzeń  $\mathbb{R}_{x,y,z}^3$ . Zakładając, że  $\Phi$  jest klasy  $C^1$  w pewnym obszarze  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  możemy, podobnie jak w przypadku dwóch zmiennych, utworzyć macierz Jacobiego. Wyznacznik tej macierzy

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v & \varphi_w \\ \psi_u & \psi_v & \psi_w \\ \chi_u & \chi_v & \chi_w \end{vmatrix}$$

nazywamy *jakobianem* odwzorowania  $\Phi$ .

**Przykład 3.** Niech  $\Phi$  będzie odwzorowaniem określonym wzorami

$$(9) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \phi \cos \theta, & y &= r \cos \phi \sin \theta, & z &= r \sin \phi, \\ & (r \geq 0, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, & -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

-odpowiada ono wprowadzeniu *współrzędnych sferycznych* w przestrzeni  $\mathbb{R}_{x,y,z}^3$  (por. rozdz. IV punkt 7). Jakobian odwzorowania  $\Phi$  ma postać

$$J(r, \phi, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \phi \cos \theta & -r \cos \phi \sin \theta & -r \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta & r \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi & 0 & r \cos \phi \end{vmatrix},$$

co po rozwinięciu wyznacznika według ostatniego wiersza daje

$$(10) \quad J(r, \phi, \theta) = A \sin \phi + B r \cos \phi,$$

gdzie

$$(11) \quad A = \begin{vmatrix} -r \cos \phi \sin \theta & -r \sin \phi \cos \theta \\ r \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \end{vmatrix} = r^2 \sin \phi \cos \phi$$

oraz

$$(12) \quad B = \begin{vmatrix} \cos \phi \cos \theta & -r \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi \sin \theta & r \cos \phi \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \phi.$$

Uwzględniając (10), (11), (12) dostajemy

$$(13) \quad J(r, \theta, \phi) = r^2 \cos \phi.$$

**Przykład 4.** W przestrzeni  $\mathbb{R}_{x,y,z}^3$  możemy również wprowadzić *współrzędne walcowe*

$$(14) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta, & z &= w, \\ (r &\geq 0, & 0 &\leq \theta \leq 2\pi, & -\infty &< w < \infty), \end{aligned}$$

gdzie  $r = |OP'|$ ,  $P' = (x, y, 0)$  jest rzutem prostopadłym punktu  $P = (x, y, z)$  na płaszczyznę  $xy$  zaś  $\theta$  oznacza kąt w płaszczyźnie  $xy$  między dodatnią półosią  $x$ -ów a wektorem  $\overrightarrow{OP'}$ . Jakobian odwzorowania  $\Phi$  określonego wzorami (14) ma postać

$$J(r, \theta, w) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

zatem rozwijając wyznacznik według trzeciego wiersza dostajemy

$$(15) \quad J(r, \theta, w) = r.$$

Definicja dyfeomorfizmu podana w rozdz. VII punkt 2 przenosi się bez zmian na przypadek obszaru domkniętego  $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^3$ . Podamy bez dowodu odpowiednik twierdzenia 1 z tego rozdziału.

**Twierdzenie 4 (o całkowaniu przez podstawienie).** *Zakładamy, że*

1<sup>o</sup>  $\mathbb{B}$  *jest domkniętym obszarem regularnym w przestrzeni  $\mathbb{R}_{u,v,w}^3$ ;*

2<sup>o</sup> *odwzorowanie*

$$\Phi : \quad x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w)$$

*jest dyfeomorfizmem w obszarze  $\mathbb{B}$ ;*

3<sup>o</sup> *obraz  $\mathbb{D}$  zbioru  $\mathbb{B}$  przy odwzorowaniu  $\Phi$  jest domkniętym obszarem regularnym*



w przestrzeni  $\mathbb{R}_{x,y,z}^3$ ;

$4^0$  funkcja  $f(x, y, z)$  jest ciągła w obszarze  $\mathbb{ID}$ .

Wówczas

$$(16) \quad \iiint_{\mathbb{ID}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\mathbb{IB}} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw.$$

**Uwaga.** Zgodnie z założeniem  $3^0$  mamy

$$\mathbb{ID} = \Phi(\mathbb{IB}), \quad \mathbb{IB} = \Phi^{-1}(\mathbb{ID}),$$

wobec tego przyjmując oznaczenie

$$f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) = (f \circ \Phi)(u, v, w)$$

można wzór (16) zapisać krócej w postaci

$$(16') \quad \iiint_{\mathbb{ID}} f dx dy dz = \iiint_{\Phi^{-1}(\mathbb{ID})} (f \circ \Phi) |J| du dv dw.$$

Opierając się na wzorze (8) możemy teraz sformułować

**Wniosek.** Przy założeniach twierdzenia 4

$$(17) \quad |\mathbb{ID}| = \iiint_{\mathbb{IB}} |J| du dv dw.$$

Przypuśćmy teraz, że chcemy obliczyć całkę

$$(18) \quad \iiint_{\mathbb{ID}} f(x, y, z) dx dy dz$$

przy użyciu współrzędnych sferycznych (Przykład 3) zakładając przy tym, że

(z<sub>1</sub>)  $f$  jest funkcją ciągłą w regularnym obszarze domkniętym  $\mathbb{ID} \subset \mathbb{R}_{x,y,z}^3$ ;

(z<sub>2</sub>)  $\mathbb{ID} = \Phi(\mathbb{IB})$ , gdzie  $\Phi$  oznacza odwzorowanie określone wzorami (9) zaś  $\mathbb{IB}$  jest regularnym obszarem domkniętym w przestrzeni  $\mathbb{R}_{r,\theta,\phi}^3$  zawartym w przedziale

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ponieważ

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \Phi(r, \theta + 2\pi, \phi)$$

oraz, zgodnie z (13);

$$J(0, \theta, \phi) = J(r, \theta, \pm \frac{\pi}{2}) = 0,$$

odwzorowanie  $\Phi$  nie jest naogół dyfeomorfizmem w obszarze  $\mathbb{B}$  i nie spełnia wobec tego założenia 2<sup>o</sup> twierdzenia 4. Mimo to można, podobnie jak w przypadku współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie (rozdz. VII punkt 2), przekształcić całkę (18) wprowadzając współrzędne sferyczne i korzystając ze wzoru (15). Wprowadźmy w przestrzeni  $\mathbb{R}_{r,\theta,\phi}^3$  przedziały

$$(19) \quad \begin{aligned} K_\varepsilon &: 0 \leq r \leq \varepsilon, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, & -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \\ S_\varepsilon^1 &: 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, & \frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \\ S_\varepsilon^2 &: 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, & -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq -\frac{\pi}{2} + \varepsilon, \\ W_\varepsilon &: 0 \leq r \leq R, & 0 \leq \theta \leq \varepsilon, & -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

i niech  $\Sigma_\varepsilon$  oznacza ich sumę. Z nierówności (19) wynika, że

$$(20) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\Sigma_\varepsilon| = 0.$$

Każdy ze zbiorów  $\Phi(K_\varepsilon)$ ,  $\Phi(S_\varepsilon^1)$ ,  $\Phi(S_\varepsilon^2)$ ,  $\Phi(W_\varepsilon)$  jest podzbiorem przestrzeni  $R_{x,y,z}^3$  określonym we współrzędnych sferycznych przez odpowiednią nierówność (19), przy czym zbiory te są zawarte w kuli o środku w początku układu współrzędnych i promieniu  $R$ . Dokładniej:

$\Phi(K_\varepsilon)$  jest kulą o środku  $(0, 0, 0)$  i promieniu  $\varepsilon$ ;

$\Phi(S_\varepsilon^1)$ ,  $\Phi(S_\varepsilon^2)$  są stożkami kołowymi o wierzchołku w punkcie  $(0, 0, 0)$  i kącie rozwarcia tworzących  $2\varepsilon$ ;

$\Phi(W_\varepsilon)$  zawiera się w wycinku przestrzeni leżącym między dwoma płaszczyznami przechodzącymi przez oś  $z$ -ów i tworzącymi kąt  $\varepsilon$ .

Wobec tego każdy z tych zbiorów zawiera się w pewnym przedziale trójwymiarowym, którego objętość dąży do zera przy  $\varepsilon \rightarrow 0$ , przyjmując zatem

$$\Phi(\Sigma_\varepsilon) = \Delta_\varepsilon$$

mamy

$$(21) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\Delta_\varepsilon| = 0.$$

Niech

$$\mathbb{B}_\varepsilon = \overline{\mathbb{B} \setminus \Sigma_\varepsilon}, \quad \mathbb{D}_\varepsilon = \overline{\mathbb{D} \setminus \Delta_\varepsilon},$$

wówczas

$$\mathbb{D}_\varepsilon = \Phi(\mathbb{B}_\varepsilon)$$

i przy tym każdy ze zbiorów  $\mathbb{B}$ ,  $\mathbb{D}$  daje się rozłożyć na sumę dwóch obszarów regularnych o rozłącznych wnętrzach w następujący sposób:

$$(22) \quad \mathbb{B} = \mathbb{B}_\varepsilon \cup \Sigma_\varepsilon, \quad \mathbb{D} = \mathbb{D}_\varepsilon \cup \Delta_\varepsilon.$$

Twierdzenie 10 rozdz. V udowodnione dla całki na płaszczyźnie przenosi się bez zmian na całkę potrójną (proponujemy Czytelnikowi przeprowadzenie dowodu). Wobec tego rozkład (22) daje

$$(23) \quad \iiint_{\mathbb{D}} f \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\mathbb{D}_\varepsilon} f \, dx \, dy \, dz + \iiint_{\Delta_\varepsilon} f \, dx \, dy \, dz$$

oraz

$$(24) \quad \iiint_{\mathbb{B}} (f \circ \Phi) |J| \, dr \, d\theta \, d\phi = \iiint_{\mathbb{B}_\varepsilon} (f \circ \Phi) |J| \, dr \, d\theta \, d\phi + \iiint_{\Sigma_\varepsilon} (f \circ \Phi) |J| \, dr \, d\theta \, d\phi.$$

Zauważmy, że

1<sup>0</sup> dla dowolnie ustalonego  $\varepsilon > 0$  odwzorowanie  $\Phi$  jest dyfeomorfizmem w obszarze  $\mathbb{B}_\varepsilon$ , wobec tego na mocy twierdzenia 4

$$(25) \quad \iiint_{\mathbb{D}_\varepsilon} f \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\mathbb{B}_\varepsilon} (f \circ \Phi) |J| \, dr \, d\theta \, d\phi;$$

2<sup>0</sup> z ciągłości funkcji  $f$  oraz  $(f \circ \Phi) |J|$  wynika istnienie stałej  $M > 0$  takiej, że

$$|f(x, y, z)| \leq M \quad \text{dla} \quad (x, y, z) \in \mathbb{D}$$

oraz

$$|(f \circ \Phi) |J|(r, \theta, \phi)| \leq M \quad \text{dla} \quad (r, \theta, \phi) \in \mathbb{B}$$

i wobec tego (por. twierdzenia 2', 3', 4' rozdz. V dotyczące całki podwójnej)

$$(26) \quad \left| \iiint_{\Delta_\varepsilon} f \, dx \, dy \, dz \right| \leq M \iiint_{\Delta_\varepsilon} dx \, dy \, dz = M |\Delta_\varepsilon|$$

oraz

$$(27) \quad \left| \iiint_{\Sigma_\varepsilon} (f \circ \Phi) |J| \, dr \, d\theta \, d\phi \right| \leq M \iiint_{\Sigma_\varepsilon} dr \, d\theta \, d\phi = M |\Sigma_\varepsilon|.$$

Możemy teraz sformułować

**Twierdzenie 5 (o całkowaniu przez podstawienie we współrzędnych sferycznych).** Zakładamy, że

1<sup>0</sup>  $\Phi$  oznacza odwzorowanie określone wzorami (9) (odpowiadające wprowadzeniu współrzędnych sferycznych w przestrzeni  $\mathbb{R}_{x,y,z}^3$ );

2<sup>0</sup> spełnione są założenia  $(z_1)$ ,  $(z_2)$ .

Wówczas zachodzi równość

$$(28) \quad \iiint_{\mathbb{D}} f \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\mathbb{B}} (f \circ \Phi) r^2 \cos \phi \, dr \, d\theta \, d\phi.$$

DOWÓD. Z oszacowań (26), (27) wynika, że

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{\Delta_\varepsilon} f \, dx \, dy \, dz = 0$$

oraz

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{\Sigma_\varepsilon} (f \circ \Phi) |J| \, dr \, d\theta \, d\phi = 0.$$

Wobec tego, uwzględniając (23) i (24), możemy przejść do granicy przy  $\varepsilon \rightarrow 0$  w równości (25), co daje tezę.  $\square$

Podobne uwagi dotyczą przekształcania całki (18) przy użyciu współrzędnych walcowych. Oznaczając przez  $\Phi$  odwzorowanie określone wzorami (14) mamy

$$\Phi(r, \theta, w) = \Phi(r, \theta + 2\pi, w)$$

oraz, zgodnie z (15),

$$J(0, \theta, w) = 0,$$

zatem odwzorowanie  $\Phi$  nie jest na ogół dyfeomorfizmem w dowolnie obranym obszarze  $\mathbb{B}$  przestrzeni  $\mathbb{R}_{r,\theta,w}^3$ . Mimo to pozostaje słuszny odpowiednik twierdzenia 4, który sformułujemy następująco:

**Twierdzenie 6 (o całkowaniu przez podstawienie we współrzędnych walcowych).** Zakładamy, że

- 1<sup>o</sup> funkcja  $f(x, y, z)$  jest ciągła w regularnym obszarze domkniętym  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}_{x,y,z}^3$ ;
- 2<sup>o</sup>  $\Phi$  oznacza odwzorowanie

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = w$$

(odpowiadające wprowadzeniu współrzędnych walcowych w przestrzeni  $\mathbb{R}_{x,y,z}^3$ );  
3<sup>o</sup> mamy

$$\mathbb{D} = \Phi(\mathbb{B}),$$

gdzie  $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}_{r,\theta,w}^3$  jest regularnym obszarem domkniętym zawartym w przedziale

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -\infty < w < \infty.$$

Wówczas zachodzi równość

$$(29) \quad \iiint_{\mathbb{D}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\mathbb{B}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, w) r \, dr \, d\theta \, dw.$$

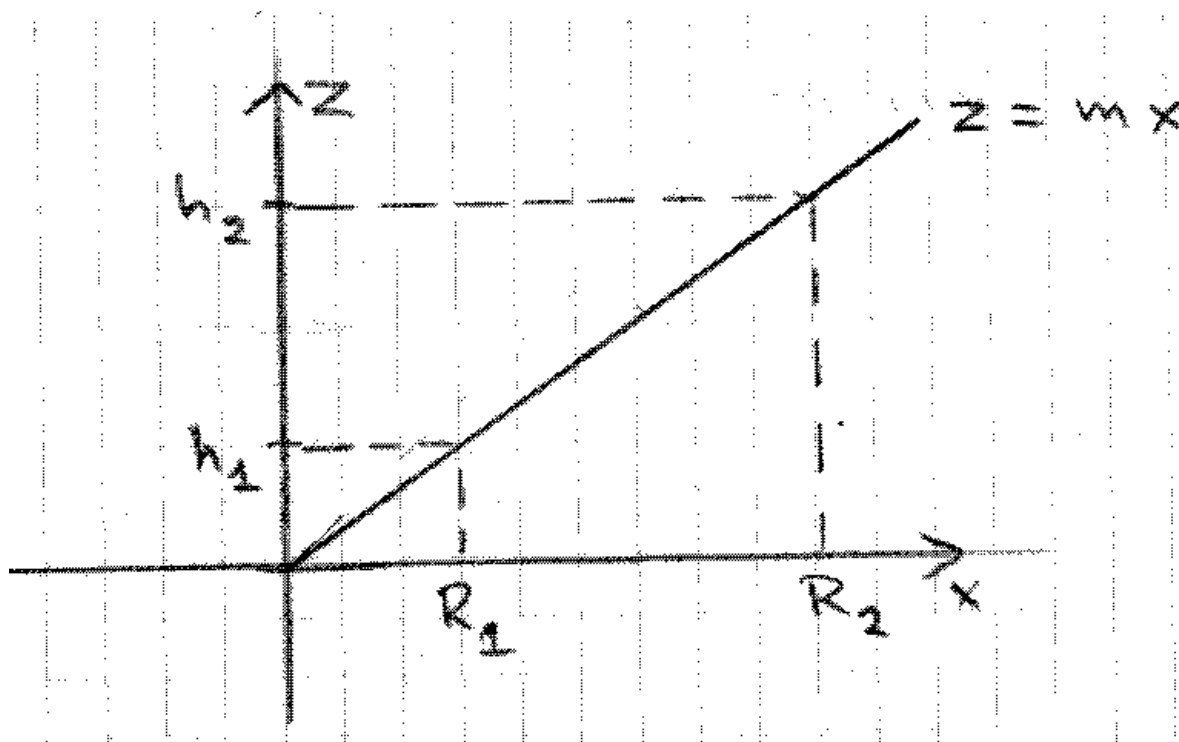
DOWÓD. Dowód przebieg podobnie do dowodu twierdzenia 5 przy uwzględnieniu równości (14), (15) (por. również dowód twierdzenia 2 rozdz. VII). Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi.  $\square$

**Przykład 5.** Obliczymy objętość kołowego stożka ściętego  $S$  o wysokości  $h$  i promieniach podstaw  $R_1, R_2$ . Przy odpowiednim obiorze układu współrzędnych powierzchnia stożka jest opisana równaniem

$$z = m\sqrt{x^2 + y^2},$$

gdzie  $m$  jest daną liczbą dodatnią. Przekrój stożka płaszczyzną  $y = 0$  dla  $x \geq 0$  podany jest na rys. 51, z którego widać, że

$$(30) \quad h = h_2 - h_1 \quad \text{oraz} \quad \frac{h_1}{R_1} = \frac{h_2}{R_2} = m.$$



[rys. 51]

Stożek  $S$  jest określony w przestrzeni  $\mathbb{R}_{x,y,z}^3$  przez nierówności

$$m\sqrt{x^2 + y^2} \leq z, \quad 0 < h_1 \leq z \leq h_2,$$

które po wprowadzeniu współrzędnych walcowych przyjmują postać

$$(31) \quad h_1 \leq w \leq h_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

oraz, przy ustalonych  $w, \theta$

$$(32) \quad 0 \leq r \leq \frac{w}{m}.$$

Stosując wzór (8) dostajemy zgodnie z twierdzeniem 6

$$(33) \quad |S| = \iiint_S dx dy dz = \iiint_{\mathbb{B}} r dr d\theta dw,$$

gdzie  $\mathbb{B}$  jest obszarem domkniętym w przestrzeni  $\mathbb{R}_{r,\theta,w}^3$  opisanym przez nierówności (31), (32). Jest to obszar normalny względem płaszczyzny  $\mathbb{R}_{\theta,w}^2$ , gdyż można go określić przez warunki

$$0 \leq r \leq \frac{w}{m}, \quad (w, \theta) \in \mathbb{B}^*,$$

gdzie  $\mathbb{B}^*$  oznacza przedział określony nierównościami (31). Wobec tego, zgodnie z twierdzeniem 3, równość (33) daje

$$|S| = \iint_{\mathbb{B}^*} \left( \int_0^{\frac{w}{m}} r dr \right) d\theta dw$$

czyli, po obliczeniu wewnętrznej całki,

$$(34) \quad |S| = \frac{1}{2m^2} \iint_{\mathbb{B}^*} w^2 d\theta dw.$$

Zamiana całki podwójnej po prawej stronie (34) na całkę iterowaną (por. rozdz. V twierdzenie 6) daje

$$|S| = \frac{1}{2m^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{h_1}^{h_2} w^2 dw$$

skąd po obliczeniu wewnętrznej całki dostajemy

$$(35) \quad |S| = \frac{\pi}{3m^2} (h_2^3 - h_1^3).$$

Wprowadzone parametry  $m$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  łatwo wyrazić przez dane zadania  $h$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  korzystając z (30). Prosty rachunek daje

$$h_1 = h \frac{R_1}{R_2 - R_1}, \quad h_2 = h \frac{R_2}{R_2 - R_1}, \quad m = \frac{h}{R_2 - R_1},$$

skąd po podstawieniu do (35) dostajemy

$$|S| = \frac{1}{3} \pi h \frac{r_2^3 - R_1^3}{r_2 - R_1}$$

czyli, po rozłożeniu licznika na czynniki i skróceniu,

$$|S| = \frac{1}{3} \pi h (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2).$$

Przechodząc do granicy przy  $R_1 \rightarrow 0$  dostajemy stąd znany wzór na objętość stożka kołowego o wysokości  $h$  i promieniu podstawy  $R = R_2$ .

**Przykład 6.** Obliczymy objętość kuli  $K_R$  o promieniu  $R$ . Zakładając, że kula ma środek w początku układu współrzędnych przestrzeni  $\mathbb{R}_{x,y,z}^3$  możemy ją opisać we współrzędnych sferycznych przy pomocy nierówności

$$(36) \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Przyjmując  $f \equiv 1$  w twierdzeniu 5 dostajemy zgodnie z (8) i (28)

$$|K_R| = \iiint_{\mathbb{B}} r^2 \cos \phi \, dr \, d\theta \, d\phi,$$

gdzie  $\mathbb{B}$  oznacza przedział domknięty w przestrzeni  $\mathbb{R}_{r,\theta,\phi}^3$  określony nierównościami (36). Zamieniając całkę po prawej stronie na całkę iterowaną (por. Twierdzenie 2) dostajemy

$$|K_R| = \int_0^R r^2 \, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \, d\phi,$$

co po scałkowaniu daje

$$|K_R| = 2\pi \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R \left[ \sin \phi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}.$$

Ostatecznie otrzymujemy znany wzór na objętość kuli

$$|K_R| = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

### 3. Interpretacja fizyczna całki potrójnej.

Wróćmy do definicji całki potrójnej po obszarze regularnym  $\mathbb{ID}$  z funkcji  $f(x, y, z)$  ciągłej w  $\mathbb{ID}$ , którą podaliśmy w punkcie 1. Niech  $\mathbb{IP}$  będzie przedziałem domkniętym zawierającym  $\mathbb{ID}$  i niech  $\Pi$  oznacza podział

$$(37) \quad \Pi : \quad \mathbb{IP} = \bigcup_{j=1}^k \mathbb{IP}_j$$

przedziału  $\mathbb{IP}$ , w którym  $\mathbb{IP}_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) są przedziałami domkniętymi o rozłącznych wnętrzach. Aby utworzyć sumę przybliżoną całki możemy

1<sup>0</sup> z rozkładu (37) wybrać tylko te przedziały  $\mathbb{IP}_j$ , które mają niepusty przekrój z obszarem  $\mathbb{ID}$  - przedziały te oznaczmy jako  $\mathbb{IP}_j^*$  ( $j = 1, \dots, k^* \leq k$ ),

2<sup>0</sup> założyć, że

$$(38) \quad p_j = (\xi_j, \eta_j, \zeta_j) \in \mathbb{IP}_j^* \cap \mathbb{ID} \quad (j = 1, \dots, k^*).$$

Przyjmując

$$(39) \quad S^*(f, \Pi, p(\Pi)) = \sum_{j=1}^{k^*} f(\xi_j, \eta_j, \zeta_j) |\mathbb{P}_j^*|$$

mamy

$$(40) \quad \iiint_{\mathbb{D}} f \, dx \, dy \, dz = \lim_{n \rightarrow \infty} S^*(f, \Pi_n, p(\Pi_n))$$

dla dowolnego ciągu normalnego podziałów  $\{\Pi_n\}$  przedziału  $\mathbb{P}$ .

Przypuśćmy teraz, że obszar  $\mathbb{D}$  jest wypełniony substancją o gęstości  $f(x, y, z)$ , wówczas suma przybliżona (39) aproksymuje masę tego obszaru z tym lepszą dokładnością im mniejsza jest średnica podziału  $\Pi$ . Z uwagi na (40) można zatem przyjąć, że masa obszaru  $\mathbb{D}$  wyraża się wzorem

$$(41) \quad M = \iiint_{\mathbb{D}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Niech  $U$  będzie układem punktów materialnych  $P_j = (x_j, y_j, z_j)$  o masie  $m_j$  ( $j = 1, \dots, s$ ). Wówczas

(i) *momentem statycznym układu  $U$  względem płaszczyzny  $\Sigma$*  nazywamy wyrażenie

$$M_\Sigma = \sum_{j=1}^s d_j m_j,$$

gdzie  $d_j$  oznacza odległość względną punktu  $P_j$  od płaszczyzny  $\Sigma$  (tzn. odległość opatrzoną znakiem  $+$  lub  $-$  zależnie od tego, po której stronie płaszczyzny  $\Sigma$  znajduje się punkt  $P_j$ );

(ii) *środkiem masy układu  $U$*  nazywamy punkt  $(\xi, \eta, \zeta)$  o współrzędnych określonych wzorami

$$\xi = \frac{1}{|U|} \sum_{j=1}^s m_j x_j, \quad \eta = \frac{1}{|U|} \sum_{j=1}^s m_j y_j, \quad \zeta = \frac{1}{|U|} \sum_{j=1}^s m_j z_j,$$

gdzie

$$|U| = \sum_{j=1}^s m_j$$

oznacza całkowitą masę układu  $U$ ;

(iii) *momentem bezwładności układu  $U$  względem płaszczyzny (prostej, punktu)* nazywamy wyrażenie

$$B = \sum_{j=1}^s d_j^2 m_j,$$

gdzie  $d_j$  oznacza odległość punktu  $P_j$  od tej płaszczyzny (względnie prostej lub punktu).



Pojęcia te łatwo przenieść na przypadek masy rozłożonej w obszarze regularnym  $\mathbb{ID}$  z ciągłą gęstością  $f(x, y, z)$ . Zauważmy, że  $j$ -ty wyraz sumy (39) można w przybliżeniu uważać za masę  $m_j$  skupioną w punkcie  $p_j$  spełniającym relację (38), przy czym dokładność przybliżenia wzrasta gdy średnica podziału dąży do zera. Z uwagi na przejście graniczne (40) określimy zatem

(A) *momenty statyczne obszaru  $\mathbb{ID}$  względem płaszczyzn układu współrzędnych* jako całki

$$M_{xy} = \iiint_{\mathbb{ID}} z f \, dx \, dy \, dz, \quad M_{yz} = \iiint_{\mathbb{ID}} x f \, dx \, dy \, dz, \\ M_{zx} = \iiint_{\mathbb{ID}} y f \, dx \, dy \, dz;$$

(B) *środek masy obszaru  $\mathbb{ID}$  jako punkt  $(\xi, \eta, \zeta)$ , którego współrzędne  $(\xi, \eta, \zeta)$  wyrażają się wzorami*

$$\xi = \frac{1}{M} \iiint_{\mathbb{ID}} x f \, dx \, dy \, dz, \quad \eta = \frac{1}{M} \iiint_{\mathbb{ID}} y f \, dx \, dy \, dz, \\ \zeta = \frac{1}{M} \iiint_{\mathbb{ID}} z f \, dx \, dy \, dz,$$

gdzie  $M$  oznacza masę obszaru  $\mathbb{ID}$  określoną wzorem (41);

(C<sub>1</sub>) *momenty bezwładności obszaru  $\mathbb{ID}$  względem płaszczyzn układu współrzędnych* jako całki

$$B_{xy} = \iiint_{\mathbb{ID}} z^2 f \, dx \, dy \, dz, \quad B_{yz} = \iiint_{\mathbb{ID}} x^2 f \, dx \, dy \, dz, \\ B_{zx} = \iiint_{\mathbb{ID}} y^2 f \, dx \, dy \, dz;$$

(C<sub>2</sub>) *momenty bezwładności obszaru  $\mathbb{ID}$  względem osi układu współrzędnych* jako całki

$$B_x = \iiint_{\mathbb{ID}} (y^2 + z^2) f \, dx \, dy \, dz, \quad B_y = \iiint_{\mathbb{ID}} (x^2 + z^2) f \, dx \, dy \, dz, \\ B_z = \iiint_{\mathbb{ID}} (x^2 + y^2) f \, dx \, dy \, dz;$$

(C<sub>3</sub>) *moment bezwładności obszaru  $\mathbb{ID}$  względem początku układu współrzędnych* jako całkę

$$B_O = \iiint_{\mathbb{ID}} (x^2 + y^2 + z^2) f \, dx \, dy \, dz.$$

Ze wzorów (A), (B) otrzymujemy natychmiast równości

$$M\xi = M_{yz}, \quad M\eta = M_{zx}, \quad M\zeta = M_{xy}.$$

Wynika z nich, że umieszczając całkowitą masę obszaru w jego środku masy otrzymujemy punkt materialny, którego momenty statyczne względem płaszczyzn układu współrzędnych są równe odpowiednim momentom tego obszaru.

**Przykład 7.** Znajdziemy środek masy półkuli  $\mathbb{D}_R$  o promieniu  $R$  przyjmując, że gęstość  $f \equiv 1$ . Umieszczając środek kuli w początku układu współrzędnych możemy przyjąć, że obszar  $\mathbb{D}_R$  jest określony we współrzędnych prostokątnych przez nierówności

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \quad z \geq 0$$

zaś we współrzędnych sferycznych przez nierówności

$$(42) \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Zgodnie ze wzorem (41) mamy (por. Przykład 6)

$$(43) \quad M = |\mathbb{D}_R| = \frac{2}{3}\pi R^3$$

zaś definicja (B) w oparciu o twierdzenie 5 daje równości

$$(44) \quad \begin{aligned} \xi &= \frac{1}{M} \iiint_{\mathbb{P}_R} r^3 \cos^2 \phi \cos \theta \, dr \, d\theta \, d\phi, & \eta &= \frac{1}{M} \iiint_{\mathbb{P}_R} r^3 \cos^2 \phi \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi, \\ \zeta &= \frac{1}{M} \iiint_{\mathbb{P}_R} r^3 \cos \phi \sin \phi \, dr \, d\theta \, d\phi, \end{aligned}$$

w których  $\mathbb{P}_R$  oznacza przedział w przestrzeni  $\mathbb{R}_{r,\theta,\phi}^3$  określony nierównościami (42). Po zamianie całek potrójnych na całki iterowane (por. Twierdzenie 2) wzory (44) przyjmują postać

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{M} \int_0^R r^3 \, dr \int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \phi \, d\phi, \\ \eta &= \frac{1}{M} \int_0^R r^3 \, dr \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \phi \, d\phi, & \zeta &= \frac{1}{M} \int_0^R r^3 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \cos \phi \, d\phi \end{aligned}$$

z której po obliczeniu całek wynika, że

$$\xi = \eta = 0, \quad \zeta = \frac{3}{16\pi}R.$$

### Zadania.

1. Niech  $\mathbb{P}$  będzie przedziałem określonym nierównościami (1) i niech

$$f(x, y, z) = p(x)q(y)r(z),$$

gdzie  $p, q, r$  są funkcjami ciągłymi jednej zmiennej. Udowodnić, że

$$\iiint_{\mathbb{P}} f \, dx \, dy \, dz = \int_a^{a'} p \, dx \int_b^{b'} q \, dy \int_c^{c'} r \, dz.$$

2. Obliczyć całkę potrójną

$$\iiint (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

zakładając, że  $\mathbb{P}$  jest przedziałem określonym nierównościami

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq z \leq c.$$

3. Obliczyć objętość obszaru  $\mathbb{D}$  ograniczonego płaszczyznami

$$x = 0, \quad y = 8, \quad z = 0,$$

płaszczyzną  $P$  o równaniu

$$x + 2y - z + 1 = 0$$

i powierzchnią walcową określoną równaniem

$$y = x^3 \quad (0 \leq x \leq 2).$$

4. Opierając się na wzorze określającym objętość kuli o promieniu  $R$  (por. Przykład 6) obliczyć objętość elipsoidy ograniczonej powierzchnią o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (a, b, c > 0).$$

Wskazówka: wprowadzić odpowiednią transformację zmiennych  $x, y, z$  i oprzeć się na twierdzeniu 4.

5. Używając współrzędnych walcowych obliczyć objętość walca kołowego i stożka kołowego o wysokości  $h$  i promieniu podstawy  $R$ .

6. Niech  $\mathbb{D}_R$  oznacza część kuli o środku w początku układu i promieniu  $R$  zawartą między płaszczyznami  $y = 0$  oraz  $y = \sqrt{3}x$ . Znaleźć środek masy obszaru  $\mathbb{D}_R$  zakładając, że gęstość  $f \equiv 1$ .

Wskazówka: zastosować współrzędne sferyczne.

7. Niech  $\mathbb{D}$  będzie częścią kuli o środku w początku układu i promieniu 1 leżącą nad płaszczyzną  $z = c$  ( $0 < c < 1$ ). Zakładając, że gęstość  $f$  spełnia jeden z warunków

$$(i) \quad f \equiv 1, \quad (ii) \quad f(r) = e^r, \quad (iii) \quad f(r) = 1 + r^2$$

(gdzie  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ) znaleźć środek masy obszaru  $\mathbb{D}$  oraz moment bezwładności tego obszaru względem początku układu.

Wskazówka: jak w zadaniu 6.

8. Znaleźć środek masy kołowego stożka ściętego o wysokości  $h$  i promieniach podstaw  $R_1, R_2$  zakładając, że gęstość  $f \equiv 1$ .

Wskazówka: wprowadzić współrzędne walcowe i przeprowadzić rachunki podobne, jak w Przykładzie 5.