Egzamin wstępny na studia doktoranckie - czerwiec 2010 - IM UWr.

1. Niech $f : [0,1]^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i niech $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq ...$ będą domkniętymi podzbiorami $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Pokaż, że $f[\bigcap_i A_i] = \bigcap_i f[A_i]$.

2. Podziel zbiór liczb niewymiernych na dwa zbiory, każdy zamknięty na dodawanie.

3. Oblicz wielomian charakterystyczny macierzy $\{1+(-1)^{i+j}\}_{1\leq i,j\leq 2010}$.

4. Załóżmy, że wektory $v_1, \ldots, v_k$ w $\mathbb{C}^n$ mają współrzędne wymierne. Niech w będzie liniową kombinacją tych wektorów o zespolonych współczynnikach. Pokaż, że jeśli w ma współrzedne wymierne to w można przedstawić jako liniową kombinację wektorów $v_1, \ldots, v_k$, w której współczynniki są wymierne.

5. Niech metryka na $X = [0,1] \times [0,1]$ będzie zadana wzorem

$$d((x_1, x_2), (y_1.y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\,.$$

Niech $f\colon X \to X$ będzie nieskracające, tzn. dla każdej pary $x, y \in X$ zachodzi $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$. Pokaż, że f jest izometrią.

6. Nieujemna mierzalna w sensie Lebesgue'a funkcja $f(x)$ spełnia

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a \frac{1}{f(x)}\,dx = 1.$$

a) Pokazać, że $a \leq 1$.

b) Udowodnić, że funkcja $\ln f(x)$ jest całkowalna na przedziale $[0, a]$.

c) Wykaż nierówności

$$a \ln a \leq \int_0^a \ln f(x)\,dx \leq -a \ln a\,.$$

7. Funkcje $f(z)$ i $g(z)$ są holomorficzne w płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$ oraz

$$|f(z)| \leq |g(z)|\,.$$

Pokazać, że $f(z) = cg(z)$ dla pewnej stałej c .

8. Niech $\{W(t) : t \geq 0\}$ będzie procesem stochastycznym o niezależnych, stacjonarnych przyrostach takich, że $EW(t) = 0$, $EW^2(t) = t$.

a) Znaleźć rozkład graniczny, gdy $t \to \infty$,

$$\frac{W(t)}{t^\alpha}$$

w zależności od parametru $\alpha \in [1/2, 1]$.

b) Dla $c > 0$, niech $\{W_c(t) := W(c^2 t)/c : t \geq 0\}$. Załóżmy dodatkowo, że dla każdego $c > 0$ mamy

$$\{W_c(t) : t \geq 0\} =_{\mathrm{d}} \{W(t) : t \geq 0\}.$$

Wykazać, że $\{W(t) : t \geq 0\}$ jest ruchem Browna.

9. Niech $X_1, X_2, ...$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $P(X_i = \mathrm{e}) = P(X_i = \mathrm{e}^2) = 1/2$ dla $k = 1, 2, ...$.

a) Zbadać zbieżność

$$\left(\prod_{k=1}^{n} X_k \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}},$$

gdy $n \to \infty$.

b) Dla jakiego parametru $a \in \mathbb{R}$ ciąg

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^a X_k \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{\sqrt{n}} X_i}}$$

zbiega, gdy $n \to \infty$, według rozkładu do pewnego niezdegenerowanego rozkładu probabilistycznego. Jaki jest to rozkład?

10. Na podstawie jednej obserwacji X weryfikuje się hipotezę $\{$ H: X ma rozkład normalny $N(0, 1)\}$ przeciwko hipotezie alternatywnej $\{K$: X ma rozkład Laplace'a o gęstości $e^{-|x|}/2$, $x \in \mathbb{R}\}$. Skonstruować najmocniejszy test na poziomie istotności $\alpha \in (0, 1)$.