Egzamin wstępny na studia doktoranckie - czerwiec 2011 - IM UWr.

1. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bedzie ciągłą funkcją, która w każdym punkcie ma lokalne ekstremum. Czy f musi być różniczkowalna?

2. Dwa niepuste zbiory pokrywają $\mathbb{R}$. Czy prawdą jest, że w jednym z nich jest punkt, którego odległość od drugiego zbioru wynosi zero?

3. Niech

$$R = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \mid a_n \in \mathbb{C}, (\exists A, B > 0)(\forall n)(|a_n| < AB^n)\}$$

będzie podzbiorem pierścienia $\mathbb{C}[[X]]$ szeregów potęgowych o współczynnikach zespolonych. Uzasadnij, że R jest podpierścieniem $\mathbb{C}[[X]]$. Wyznacz wszystkie ideały maksymalne pierścienia R.

4. Znajdź 1-parametrową grupę homeomorfizmów płaszczyzny

$$\phi_t \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

taką, że $\phi_1\binom{x}{y} = \binom{x+y}{y+1}$.

5. Udowodnij, że dowolny wielokąt można przedstawić w postaci sumy skończenie wielu trójkątów o rozłącznych wnętrzach (wielokąt to obszar płaszczyzny ograniczony łamaną zwyczajną zamknietą).

6. Liczby dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a^2,$$
$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_n^4 = b^4,$$

gdzie a, $b > 0$. Pokazać, że $b \leq a$ oraz $n \geq a^4/b^4$. Udowodnić, że

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq \frac{a^3}{b^2}.$$

7. Trójkąt T jest określony warunkami $0 \leq y \leq 1 - |x|$. Funkcja $f(x, y)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe w T oraz spełnia

$$\nabla f(x, y) \neq 0, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|.$$

Pokazać, że

$$\max_{(x,y)\in T} |f(x, y)| \leq \max_{-1\leq x\leq 1} |(f(x, 0)|.$$

8. Niech $\{B(t) : t \in \mathbb{R}\}$ będzie standardowym ruchem Browna ($Cov(B(s), B(t)) = (|s| + |t| - |t-s|)/2$, $E(B(t)) = 0$).

(1) Obliczyć

$$P(B(\pi) > 2011B(1) | B(-\pi) > 2012).$$

(2) Niech $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ będzie dany przez $X(t) := \frac{B(e^t)}{f(t)}$. Znaleźć postać wszystkich funkcji f, dla których $Cov(X(s), X(t)) = D(|t-s|)$. Podać postać funkcji $D(\cdot)$.

9. Niech $Z_{n,1}, Z_{n,2}, ..., Z_{n,n}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na $[-n, n]$. Niech $X_{n,i} = 1$ jeśli $Z_{n,i} \in (a, b)$ oraz $X_{n,i} = 0$ jeśli $Z_{n,i} \notin (a, b)$. Rozpatrzmy $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_{n,i}$.

(1) Obliczyć $\lim_{n\to\infty} P(S_n = 0)$.
(2) Wykazać, że istnieje granica Y według rozkładu

$$S_n \Rightarrow Y,$$

gdy $n \to \infty$. Obliczyć wartość oczekiwaną $E(Y)$.

10. Niech X_1, X_2 będzie próbą losową rozmiaru 2 z rozkładu jednostajnego $(2\beta, 3\beta)$, gdzie $\beta > 0$.

a) Znajdź metodą momentów estymator parametru β.

b) Czy jest to estymator nieobciążony ?

c) Znajdź estymator największej wiarygodności parametru β.