Zadanie 1. Dla liczb $\alpha > 0$ rozważamy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n^\alpha}.$$

1(a) Dla jakich wartości α szereg jest zbieżny ?

1(b) Dla jakich wartości parametru α szereg jest bezwzględnie zbieżny ?

Zadanie 2. Funkcja $f(x, y)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe. Wiadomo, że $f(0, 0) = 0$ oraz $\|\nabla f(x, y)\| \leqslant 1$ w kole $x^2 + y^2 \leqslant 5$, gdzie $\|(v, u)\| = \sqrt{u^2 + v^2}$. Udowodnić, że

$$f(2, 1) \leqslant \sqrt{5}.$$

W tym celu można rozważyć funkcję $g(t) = f(2t, t)$.

Zadanie 3. Dowolny trójkąt ostrokątny o różnych bokach może posłużyć jako siatka czworościanu, jeżeli narysuje się w nim trzy odcinki łączące parami środki boków. Otrzymany czworościan jest dość specyficzny: ma wszystkie ściany przystające.

3(a) Ile elementów liczy sobie grupa izometrii własnych takiego czworościanu?

3(b) Co to za grupa?

Zadanie 4. Niech M będzie macierzą $n \times n$ o wyrazach wymiernych, której wielomian charakterystyczny jest nierozkładalny nad $\mathbb{Q}$. Niech $\mathbf{A}$ będzie podalgebrą $M_{n\times n}(\mathbb{Q})$ generowaną przez M. Wykazać, że:

4(a) macierz identycznościowa należy do $\mathbf{A}$;

4(b) $\mathbf{A}$ jest ciałem.

Zadanie 5. Wyznacz wszystkie podgrupy indeksu 2 w grupie S_n permutacji n elementów.

Zadanie 6. Niech $f : X \to Y$ będzie przekształceniem ciągłym przestrzeni zwartych metrycznych X i Y. Udowodnić, że jeśli zbiory $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ są domknięte w X to

$$f[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n] = \bigcap_{n=1}^{\infty} f[A_n].$$

Czy istotne jest założenie

6(a) ciągłości funkcji f?

6(b) domkniętości zbiorów A_n ?

Zadanie 7. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów domkniętych płaszczyzny euklidesowej, i niech $\mathcal{F}_\sigma$ oznacza rodzinę wszystkich tych zbiorów, które są sumami przeliczalnie wielu zbiorów z $\mathcal{F}$. Znaleźć moce obu rodzin. Zaproponować uogólnienia uzyskanych wyników.

Zadanie 8. W zadaniach 8b-8d $\{X_n, n \geqslant 1\}$ jest ciągiem wzajemnie niezależnych zmiennych losowych.

8(a) Sformułować definicje zbieżności z prawdopodobieństwem jeden i według prawdopodobieństwa szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ zmiennych losowych X_n.

8(b) Co można powiedzieć o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$, gdy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\omega : X_n(\omega) \neq Y_n(\omega)) < \infty,$$

oraz $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny z prawdopodobieństwem jeden?

8(c) Co można powiedzieć o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$, gdy X_n mają rozkład normalny ze średnią zero i wariancją σ_n^2, odpowiednio?

8(d) Co można powiedzieć o rozkładzie szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$, w sytuacji zadania 8(c)?

Zadanie 9. Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $(-b, b)$, gdzie $b > 4$. Obliczyć prawdopodobieństwo $p(b)$, że równanie

$$t^2 + Xt + Y = 0$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste. Obliczyć granicę $\lim_{b\to\infty} p(b)$.

Zadanie 10. Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$, $n \geqslant 2$, będzie próbą z rozkładu $F \in \mathcal{F}$, gdzie $\mathcal{F}$ jest rodziną rozkładów ze skończoną wariancją $\sigma^2 > 0$. Wyznaczyć estymatory nieobciążone z jednostajnie minimalną wariancją dla parametru σ^2, gdy:

10(a) $\mathcal{F}$ jest rodziną rozkładów zero-jedynkowych $b(1, p)$, $p \in (0, 1)$;

10(b) $\mathcal{F}$ jest rodziną rozkładów Poissona $\pi(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Odpowiedzi uzasadnić.