Studium Doktoranckie Instytutu Matematycznego UWr

EGZAMIN WSTĘPNY — 6 CZERWCA 2008 R.

Zadanie 1. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest klasy C^2 oraz

$$f(0,0) = f(0,1) = f(1,0) = f(1,1).$$

Udowodnić, że istnieje punkt (x_0, y_0) taki, że

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Zadanie 2. Wykazać, że funkcja

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$$

ma granicę, gdy $x \to +\infty$ i obliczyć wartość tej granicy.

WSKAZÓWKA: Porównać z odpowiednią całką.

Zadanie 3.

3(a) Udowodnić, że wśród domkniętych kół zawierających ustalony ograniczony podzbiór płaszczyzny istnieje dokładnie jedno, mające najmniejszy możliwy promień.

3(b) Udowodnić, że jeśli grupa G jest podgrupą grupy izometrii płaszczyzny, to albo istnieje punkt płaszczyzny stały dla wszystkich elementów G, albo też istnieje punkt płaszczyzny p, którego orbita $\{g(p) : g \in G\}$ jest nieograniczona.

Zadanie 4. Załóżmy, że każda zespolona wartość własna z rzeczywistej macierzy A rozmiaru 2×2 spełnia warunek $\sin z = \cos z$. Ustalić, czy wynika stąd, że $\sin(A) = \cos(A)$.

UWAGA: $\sin(A) = A - A^3/3! + A^5/5! - \dots$

Zadanie 5. Niech G będzie grupą skończenie generowalną.

5(a) Udowodnić, że jeśli H jest podgrupą G indeksu 100, to istnieje taki homomorfizm $\varphi : G \to S_{100}$, że $\ker(\varphi) \subseteq H$.

5(b) Udowodnić, że grupa G ma skończenie wiele podgrup indeksu 100.

Zadanie 6. Niech A i B będą przeliczalnymi gęstymi podzbiorami $\mathbb{R}$.

6(a) Udowodnić, że istnieją takie ciągi różnowartościowe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, że $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ oraz dla dowolnych i, j

$$a_i < a_j \Leftrightarrow b_i < b_j.$$

6(b) Ustalić, czy wtedy funkcja $f : A \to B$ dana wzorem $f(a_i) = b_i$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$ jest ciągła i czy f można przedłużyć do funkcji ciągłej z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$.

Zadanie 7. *Uzwarceniem przestrzeni* X nazywamy przestrzeń zwartą $\tilde{X}$, zawierającą zbiór gęsty X' homeomorficzny z X. Zbiór $\tilde{X} \setminus X'$ nazywamy *narostem* uzwarcenia.

7(a) Skonstruować uzwarcenie $\mathbb{R}$ o naroście jednopunktowym oraz uzwarcenie $\mathbb{R}$ o naroście składającym się z dwóch rozłącznych odcinków na płaszczyźnie.

7(b) Zbadać, czy istnieje uzwarcenie $\mathbb{R}$ z narostem n-punktowym dla $n > 2$.

Zadanie 8. Koszt transportu n osób na Kasprowy wynosi $n^2 + 2n + 17$. Ilość osób, która pojawia się w trakcie pierwszego kursu, ma rozkład Bernoulli'ego $B(10, 0.2)$. Wyznaczyć:

8(a) Prawdopodobieństwo, że koszt transportu wyniesie nie więcej niż 20.

8(b) Wartość oczekiwaną kosztu.

Zadanie 9. Niech $\{B_1(t); t \geqslant 0\}$, $\{B_2(t); t \geqslant 0\}$ będą niezależnymi standardowymi ruchami Browna.

9(a) Wyznaczyć wszystkie takie $a > 0$, że proces

$$\{X(t) := aB_1(t) - B_2\left(\frac{3}{2}at\right); t \geqslant 0\}$$

jest standardowym ruchem Browna.

9(b) Obliczyć prawdopodobieństwo

$$P(2008B_1(\pi) > B_2(2007)).$$

9(c) Znaleźć granicę według rozkładu dla

$$\frac{B_1(nt)}{\sqrt{n}}.$$

Odpowiedzi uzasadnić.

Zadanie 10. Niech $(X_1, \ldots, X_n)$ będzie wynikiem n niezależnych doświadczeń. Doświadczenia te polegają na zliczaniu ilości orłów, jaką dostaniemy podczas niezależnego rzucania monetą; rzuty te powtarzane są aż do pojawienia się po raz pierwszy reszki. Zakładamy, że prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w jednym rzucie θ jest nieznane.

10(a) Wyznaczyć minimalną statystykę dostateczną dla θ.

10(b) Wyznaczyć statystykę zupełną dla θ.

Uzasadnić odpowiedzi.