Egzamin wstępny na studia doktoranckie - czerwiec 2012 - IM UWr.

1. Pokazać, że przeliczalny podzbiór płaszczyzny $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ można rozłożyć na dwa zbiory tak by pionowe sekcje jednego i poziome sekcje drugiego były skończone.

2. Pokazać, że z każdego pokrycia zbioru $E \subseteq \mathbb{R}$ niezdgenerowanymi niekoniecznie otwartymi odcinkami można wybrać podpokrycie przeliczalne.

3. Niech V będzie dowolną (niekoniecznie skończenie wymiarową) przestrzenią wektorową nad nieskończonym ciałem. Pokaż, że V nie jest sumą mnogościową skończenie wielu swoich właściwych podprzestrzeni.

4. Niech γ będzie zamkniętą krzywą na płaszczyźnie o długości 1. Pokaż, że istenieje domknięte koło o promieniu $1/4$, które zawiera γ.

5. Znajdź wszystkie kąty φ dla kórych macierz obrotu o kąt φ w pewnej bazie przedstawia się macierzą całkowitoliczbową.

6. Niech $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ będzie ciągłą funkcją. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^n f(x)dx.$$

7. Niech f będzie funkcją holomorficzną na $\mathbb{C}$ taką, że

$$\left|f(1/n)\right| \leq n^{-n} \qquad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Pokaż, że f jest tożsamościowo równa 0.

8. Każdy bok i przekątną $n-$kąta foremnego pomalowano w sposób losowy na jeden z 3 kolorów (kolory odcinków są dobierane niezależnie i każdy z kolorów jest wybierany z jednakowym prawdopodobieństwem). Oblicz wartość oczekiwaną liczby jednobarwnych trójkątów o wierzchołkach będących wierzchołkami wielokąta.

9. Niech $\{B(t) : t \geq 0\}$ będzie standardowym ruchem Browna oraz $f(i) = i(i+1)/2$ dla $i = 1, 2, ...$ Niech $Z_n := \sum_{i=1}^n \frac{B(f(i+1))-B(f(i))}{\sqrt{i+1}}$.
a) Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n > n).$$

b) W zależności od wartości parametru $\alpha > 0$, zbadaj zbieżność według rozkładu

$$\frac{Z_n}{n^\alpha}.$$

10. Niech $(X_1, ..., X_n)$ będzie próbą z rozkładu P należącego do rodziny rozkładów jednostajnych $U(\theta - 1/2, \theta + 1/2)$, $\theta \in \mathbb{R}$.
a) Korzystając z kryterium faktoryzacji wyznaczyć statystykę dostateczną;
b)Zbadać, czy znaleziona statystyka jest minimalną statystyką dostateczną.