
Lista 2: Podstawowe własności funkcji, wielomiany

Matematyka dla chemii ogólnej, 2016

1. W tym samym układzie współrzędnych narysować wykresy funkcji $f(x) = mx + 1$ dla $m \in \{2, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -2\}$.
2. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkty (a) $(0, 2)$ i $(2, 3)$; (b) $(1, 4)$ i $(-1, 4)$.
3. Wyznaczyć funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$, jeśli (a) $f(-2) = 21$, $f(0) = 5$ i $f(1) = 6$; (b) $f(0) = 3$ i $f(1) = 2$.
4. W jaki sposób z wykresu funkcji $f(x)$ uzyskać wykres funkcji $g_1(x) = f(x) + 1$, $g_2(x) = f(x + 1)$, $g_3(x) = |f(x)|$ i $g_4(x) = f(|x|)$?
Wskazówka: Rozważyć proste funkcje, np. $f(x) = x - 1$, $f(x) = x^2 - 1$.
5. Sprawdzić, że funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy $b = 0$. Dla jakich a, b, c funkcja f może być nieparzysta?
6. Sprawdzić, dla jakich stałych funkcja homograficzna $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0$ i $ad - bc \neq 0$) jest parzysta lub nieparzysta?
7. Pokazać, że jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest naraz parzysta i nieparzysta, to musi być równa 0.
8. Dla podanych funkcji naszkicować wykres, podać naturalną dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, sprawdzić różnowartościowość i przedziały monotoniczności.
a) $f(x) = -x^3$ b) $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$ c) $f(x) = |x^2 - 3|$
9. Rozłożyć na czynniki wielomiany:
a) $x^3 + 2x^2 - 7x + 4$, b) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4$,
c) $x^4 - 4x^2 + 4$, d) $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$.
10. Poniższe ilorazy przedstawić jako sumę wielomianu i właściwej funkcji wymiernej (w najprostszej postaci):

$$(a) \frac{x^2 - 9}{x - 3}, \quad (b) \frac{2x^2 + 6x + 4}{x^2 - 1}, \quad (c) \frac{6x^4 - 2x^3 - 3x + 2}{2x^3 - 1}, \quad (d) \frac{x^5 - 2x^4 - 3x^2 + x + 12}{x^2 + x + 1}.$$

11. Z równania gazu dla niewielkich ciśnień $pV = RT(1 + \frac{B}{V})$ wyliczyć współczynnik B jako funkcję pozostałych zmiennych (p - ciśnienia, V - objętości molowej, R - stałej gazowej i T - temperatury).
12. Stała dysocjacji $K_a > 0$ i stopień dysocjacji $\alpha > 0$ słabego jednoprotonowego kwasu o stężeniu $c > 0$ spełniają zależność

$$K_a = \frac{\alpha^2 c}{1 - \alpha}.$$

Wyznacz α jako funkcję K_a i c .

13. Rozwiązać równania i nierówności

$$a) 2 + \frac{3-x}{x-2} = \frac{1}{2-x} + \frac{6-x}{3x^2-12}$$

$$b) x^4 + 5x^2 - 6 = 0$$

$$c) \frac{3}{x+1} > \frac{2}{x-2}$$

$$d) |x+1| = |x-1|$$

$$e) |x^2 - 7x + 8| = 2$$

$$f) \left| \frac{5x-3}{2x+7} \right| < 2$$