Lista 7a: Zadania optymalizacyjne

Matematyka dla chemii ogólnej, 2016

Schemat rozwiązywania zadań optymalizacyjnych.

1. Przeczytaj uważnie zadanie i spróbujwyobrazić sobie problem. Najlepiej zrób rysunek.
2. Korzystając z danych w zadaniu ułóż wzór funkcji f opisujący problem do optymalizacji. Być może będziesz musiał(a) wprowadzić dodatkowe zmienne (niewiadome).
3. Sprawdź, jakie inne zależności będą spełniać dane z zadania i wprowadzone zmienne. Wylicz z nich wzory na wszystkie zmienne poza jedną, np. x. Dzięki temu f stanie się funkcją jednej zmiennej x.
4. Określ dziedzinę funkcji f, biorąc pod uwagę naturalne ograniczenia (np. długość nie może być ujemna).
5. Poszukaj punktów stacjonarnych f: $f'(x) = 0$.
6. Dla każdego z punktów stacjonarnych sprawdź jego charakter przy pomocy warunku wystarczającego istnienia ekstremum.
7. Upewnij się, że znaleziony punkt jest ekstremum o właściwym charakterze i że znajduje się w dziedzinie funkcji f.

---

1. Mamy dane ogniwo elektryczne o sile elektromotorycznej E i oporze wewnętrznym r. Łącząc bieguny ogniwa oporem zewnętrznym x otrzymujemy prąd o natężeniu $I = \frac{E}{x+r}$. W oporze zewnętrznym wydziela się wówczas (w jednej jednostce czasu) ciepło $Q = xI^2$. Przy jakim oporze x wydzieli się najwięcej ciepła?
2. Prostopadłościenny kontener ma mieć pojemność 22,5m^3 i kwadratową podłogę. Koszt 1m^2 blachy potrzebnej do wykonania podłogi i pokrywy wynosi 20 zł, a ścian bocznych - 30 zł. Jakie powinny być wymiary kontenera, aby koszt budowy był najmniejszy?
3. W kulę o promieniu R wpisano walec o wysokości h i promieniu podstawy r. Dla jakich r i h objętość walca będzie największa?
4. Platforma wiertnicza P jest zakotwiczona na morzu 10 km od najbliższego punktu brzegu O. Ropa z tej platformy będzie dostarczana ropociągiem do rafinerii R położonej nad brzegiem morza, 16 km od punktu O. Koszt ułożenia 1 km ropociągu na dnie morza wynosi 200 tysięcy euro, a na lądzie – 100 tysięcy euro. Do którego miejsca na brzegu należy poprowadzić ropociąg (i dalej wzdłuż brzegu), aby koszt budowy był najmniejszy?
5. W marcu 2008 roku Komitet Wykonawczy FIFA przyjął uchwałę, która zakłada, że wymiary boiska piłkarskiego muszą wynosić 105 m długości i 68 m szerokości, a szerokość bramki – 7,32 m. Przyjmijmy, że szansa trafienia do bramki z ustalonego punktu boiska P jest tym większa im większy jest kąt widzenia bramki z punktu P (kat między odcinkami łączącymi P z krańcami bramki). W którym miejscu na linii bocznej należy ustawić piłkę, aby szansa trafienia nią do bramki była największa?

Wskazówki

1. $Q = \frac{E^2 x}{(x+r)^2}$.

2. Wprowadzić zmienne b – długość brzegu podłogi i h – wysokość kontenera. Sprowadzić problem do badania funkcji $C(x) = 40b^2 + 120\frac{V}{b}$, $b > 0$.

3. $V(h) = \frac{\pi}{4}(4R^2 - h^2)h$, $h \in [0, 2R]$.

4. (a) Jako zmienną x wprowadzić odległość między punktem O a punktem doprowadzenia rociągu do brzegu morza. (b) Sprowadzić problem do badania funkcji $K(x) = 200\sqrt{x^2 + d} + 100(h-x)$, $x \in [0, h]$, gdzie d – odległość platformy od brzegu, h – odległość rafinerii od punktu brzegu najbliższego platformie.

5. (a) Jako zmienne pomocnicze wprowadzić kąt widzenia bramki oraz kąt między bramką a linią boczną boiska. (b) Sprowadzić problem do znalezienia największej wartości funkcji

$$f(x) = \frac{4bx}{4x^2 + s^2 - b^2}, \quad x \in [0, d],$$

gdzie b - szerokość bramki, s – szerokość boiska, d - długość boiska.