Lista 11: Funkcje mierzalne i miara Lebsgue'a

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2018/2019

W zadaniach zakładamy, że X jest niepustym zbiorem, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ σ-ciałem, λ_n oznacza n-wymiarową miarę Lebesgue'a, a $\mathcal{C}$ – zbiór Cantora.

1. Wykazać, że jeśli $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ są $\mathcal{A}$-mierzalne, to zbiory $A = \{x \in X \colon f(x) > g(x)\}$, $B = \{x \in X \colon f(x) \leq g(x)\}$ oraz $C = \{x \in X \colon f(x) \neq 3\} \cap \{x \in X \colon g(x) < \infty\}$ należą do $\mathcal{A}$.

2. Pokazać, że jeśli $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ jest $\mathcal{A}$-mierzalna i $A \in \mathcal{A}$, to funkcja
$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$
jest także $\mathcal{A}$-mierzalna.

3. Pokazać, że poniższe funkcje są borelowskie. Które z nich są funkcjami prostymi?
$$f_1(x) = \operatorname{sgn}(x), \quad f_2(x) = [x], \quad f_3(x) = \begin{cases} x^2 + \pi, & x < 1 \\ \ln(x) - x, & x \geq 1 \end{cases}$$
$$f_4(x) = \begin{cases} e^x, & x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}, \quad f_5(x) = \begin{cases} x^2, & \sin x > 0 \\ 2, & \sin x = 0 \\ \cos x, & \sin x < 0 \end{cases}$$

4. Niech $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie ciągiem funkcji $\mathcal{A}$-mierzalnych. Sprawdzić, że następujące zbiory należą do $\mathcal{A}$:
   (a) zbiór $x \in X$ takich, że $f_n(x) < 0$ dla wszystich n;
   (b) zbiór $x \in X$ takich, że $f_n(x) < 0$ dla prawie wszystich n;
   (c) zbiór $x \in X$ takich, że $f_n(x) < 0$ dla nieskończenie wielu n;
   (d) zbiór $x \in X$ takich, że $\sup_n f_n(x) \geq 0$;
   (e) zbiór $x \in X$ takich, że ciąg $(f_n(x))_n$ jest (słabo) rosnący;

5. Uzasadnić mierzalność poniższych zbiorów i obliczyć ich jednowymiarową miarę Lebesgue'a:
   (a) $A = \{2^n; n \in \mathbb{N}\}$, (b) $B = (-10, 10]$ (c) $C = (2018, +\infty]$, (d) $D = \mathcal{C} \cup (\mathbb{Q} \cap [-1, 0])$.

6. Uzasadnić mierzalność poniższych zbiorów i obliczyć ich dwuwymiarową miarę Lebesgue'a:
   (a) $A = \{(1, 1)\}$, (b) $B = \{(x, x^3 - 2); x \in [0, 1]\}$ (c) $C = \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, (d) $D = [-\pi, \pi] \times (1, e)$, (e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 7\}$, (f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < x - 6\}$.

7. Czy dla każdego $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ zachodzi $\lambda(A) = \lambda(\operatorname{Int}(A))$? A $\lambda(A) = \lambda(\operatorname{Cl}(A))$?

8. Niech A będzie zbiorem tych liczb z przedziału $[0,1]$, których rozwinięcie dziesiętne nie zawiera cyfry 3, czyli
$$A = \{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}, a_n \in \{0,1,2,4,\dots,9\}\}.$$
Wykazać, że A jest mierzalny względem miary Lebesgue'a i że ma miarę Lebesgue'a 0.

9. Dana jest rodzina zbiorów $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taka, że:
$$\text{(a)}\ \ A_n \in \mathcal{L}, \quad \text{(b)}\ \ A_{n+1} \subset A_n, \quad \text{(c)}\ \ \lambda(A_1) = 2018, \quad \text{(d)}\ \ \lambda(A_{n+1}) = \frac{5}{9}\lambda(A_n).$$
Policzyć miarę Lebesgue'a zbioru $A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

10. Podać przykład lub uzasadnić, że nie istnieje:
    (a) zbiór $A \subset \mathbb{R}$, który jest nieprzeliczalny i $\lambda(A) = 0$;
    (b) zbiór $A \subset \mathbb{R}$, który jest nieograniczony i $\lambda(A) = 1$;
    (c) zbiór $A \subset \mathbb{R}$ taki, że $\lambda(A) = 2$, $\lambda(\mathrm{Int}(A)) = 1$, $\lambda(\mathrm{Cl}(A)) = 2$,
    (d) zbiór $A \subset \mathbb{R}$ taki, że $\lambda(\mathrm{Int}(A)) = 1$, $\lambda(\mathrm{Cl}(A)) = \infty$,
    (e) zbiór otwarty V zawierający $A = [0,1] \cup \{3\}$ i taki, że $\lambda(V \setminus A) < \varepsilon$.