

---

## Lista 1: Przestrzenie metryczne i kule

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2018/2019

---

1. Sprawdzić, czy poniższe funkcje są metrykami na zbiorze  $X$ :

(a)  $d(x, y) = |7^x - 7^y|$ ,  $X = \mathbb{R}$ ;    (b)  $d(x, y) = |3\sqrt{x} - 4\sqrt{y}|$ ,  $X = [0, +\infty)$ ;

(c)  $d(n, m) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$ ,  $X = \mathbb{N}_1$ ;    (d)  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1| + |x_2|$ ,  $X = \mathbb{R}^2$ .

2. Niech  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2) \in X$ . Przyjmujemy oznaczenia

$$d_T(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \quad (\text{metryka taksówkowa}),$$

$$d_E(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2} \quad (\text{metryka euklidesowa}),$$

$$d_M(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \quad (\text{metryka maksimum}).$$

(a) Wykazać, że  $d_T$  jest metryką na  $\mathbb{R}^2$ .

(b) Wykazać, że dla dowolnych punktów  $x, y \in \mathbb{R}^2$  zachodzą nierówności

$$d_M(x, y) \leq d_E(x, y) \leq d_T(x, y) \leq 2d_M(x, y).$$

(c) Wywnioskować stąd, że  $d_T, d_E, d_M$  są parami równoważne.

3. Zapisać wzór na liczenie odległości w metryce rzeka  $d_R$  i sprawdzić, że faktycznie jest to metryka.

4. (Poniższe zadanie pokazuje, jak można przenieść metrykę z jednego zbioru na inny, jest to tzw. transport metryki) Niech  $X$  będzie niepustym zbiorem,  $(Y, d)$  – przestrzenią metryczną, a  $f : X \rightarrow Y$  – injekcją (funkcją różnowartościową). Sprawdzić, że  $d_f(x, y) := d(f(x), f(y))$  jest metryką na  $X$ .

5. Wyznaczyć kule  $K(2, \frac{1}{2})$ ,  $K(1, 4)$ ,  $K(0, 1)$ ,  $\overline{K}(0, 1)$ ,  $\overline{K}(1, 1)$ ,  $\overline{K}(2, 4)$ , w przestrzeni  $(X, d)$ , gdzie  $X = [0, 3)$ ,  $d(x, y) = |x - y|$ . Na podstawie nabytego doświadczenia odpowiedzieć na pytania:

(a) Czy dwie kule (otwarte) o różnych środkach mogą być sobie równe?

(b) Czy kula otwarta może być równa kuli domkniętej o tym samym środku i tym samym promieniu?

(c) Czy kula otwarta może być równa kuli domkniętej o nie tym samym środku i nie tym samym promieniu?

6. Narysować  $K((0, 0), 1)$  i  $K((-1, 2), 5)$  na płaszczyźnie z metryką euklidesową, taksówkową, maksimum, dyskretną, rzeka i centrum.

7. (To zadanie jest bardzo ważne. Powinniście z niego zapamiętać, jak wyglądają bardzo małe kule w metryce rzeka i centrum.) Jakie kształty mogą mieć kule w metrykach rzeka i centrum? Od czego one zależą? Jak wyglądają te kule, jeśli założymy, że promień jest bardzo mały?

8. Dla metryki  $d(n, m) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$  na  $X = \mathbb{N}_1$  wyznaczyć kule  $K(10, 3)$ ,  $K(2, \frac{1}{3})$ ,  $\overline{K}(m, \frac{1}{m})$  ( $m$  ustalone, naturalne).