
Lista 2: zbiory otwarte i domknięte, zbieżność

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2018/2019

1. Podać kilka przykładów zbiorów otwartych w metryce rzeka d_R . Czy istnieje zbiór $A \subset \mathbb{R}^2$, który jest otwarty w metryce euklidesowej, ale nie jest otwarty w d_R ? A odwrotnie: otwarty w d_R , ale nie otwarty w d_E ? Czy zatem metryki d_E i d_R są równoważne?
2. Podać przykład na to, że suma nieskończonej rodziny zbiorów domkniętych nie musi być zbiorem domkniętym (a) w \mathbb{R} , (b) w \mathbb{R}^2 (z wybraną metryką). Czy istnieje taki przykład w \mathbb{R} z metryką dyskretną?
3. Załóżmy, że metryki d_1 i d_2 na przestrzeni X są równoważne. Pokazać, że ciąg $(x_n)_n \subset X$ jest zbieżny w d_1 wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny w d_2 .

4. Zbadać zbieżność poniższych ciągów w podanych przestrzeniach metrycznych:

(a) $x_n = (\frac{\cos n}{n}, \frac{n^2+1}{n}, n - \sqrt{n^2 - n})$, (\mathbb{R}^3, d_E) ;

(b) $x_n = ((1 - \frac{1}{n})^{4n}, e^{-n})$, (\mathbb{R}^2, d_T) ;

(c) $x_n = (1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, (\mathbb{R}^2, d_C) ;

(d) $x_n = \sin \frac{n\pi}{2}$, (\mathbb{R}, d_D) .

5. Na czym polega błąd w poniższym rozumowaniu: "w przestrzeni $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ zbiór $B = [-1, 1]$ nie jest domknięty, bo ciąg $x_n = (-1)^n$ jest zawarty w B , ale nie ma granicy w B "?
6. (W tym zadaniu chcemy 'poznać' nową metrykę, czyli zrozumieć, co w tej metryce oznacza "blisko", jakie są zbiory otwarte, domknięte, etc.) Rozważamy przestrzeń metryczną

$$X = \mathbb{R}, \quad d_*(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x = y, \\ |x| + |y|, & \text{gdy } x \neq y. \end{cases}$$

- (a) Czy d_* na pewno jest metryką? :)
 - (b) Jak wyglądają kule w (X, d_*) ? Od czego zależy ich kształt?
 - (c) Kiedy ciąg $(x_n)_n \in \mathbb{R}$ jest zbieżny w (X, d_*) ?
 - (d) Czy singleton $\{2018\}$ jest otwarty? Czy jest domknięty?
 - (e) Czy odcinek $(-1, 1)$ jest otwarty? Czy jest domknięty?
 - (f) Czy istnieje w (X, d_*) zbiór, który nie jest ani otwarty, ani domknięty?
7. Sprawdzić, które z poniższych zbiorów są otwarte, a które domknięte w \mathbb{R} z metryką euklidesową: (a) $\{n \in \mathbb{N}_1 : n < \sqrt{2}\}$, (b) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, (c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (d) $\{\frac{3}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, (e) $[3, +\infty)$.
 8. Zbadać, czy poniższe zbiory są otwarte lub domknięte w metrykach: maksimum, rzeka i centrum na \mathbb{R}^2 :
(a) $[-1, 1] \times (1, 2)$; (b) $\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; (c) $\{(-x, x) : x \in (-2, -1)\}$; (d) $\{(x, 0) : 0 < x < 2\}$.