

---

## Lista 4: Zbiory otwarte i domknięte w podprzestrzeniach metrycznych, zbiory ograniczone

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2018/2019

---

We wszystkich zadaniach zakładamy, że  $(X, d)$  jest przestrzenią metryczną. Metrykę euklidesową oznaczamy  $d_E$ , metrykę taksówkową  $d_T$ , metrykę maximum  $d_M$ , metrykę rzeka  $d_R$ , metrykę centrum  $d_C$ , metrykę dyskretną  $d_D$ .

- Rozpartujemy przestrzeń metryczną  $X = [0, 1] \times (0, 1)$  z metryką euklidesową. Znaleźć wnętrza, domknięcia i brzeg następujących zbiorów:  
(a)  $A = (0, 1) \times \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}_2\}$ , (b)  $B = (\frac{1}{2}, 1) \times (0, 1)$ , (c)  $C = \{(x, x) : x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]\}$ .
- Znaleźć wnętrza i domknięcia zbiorów w podanych przestrzeniach:  
(a)  $\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$  w  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, d_E)$ ; (b)  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cap \mathbb{Q}$ , w  $(\mathbb{Q}, d_E)$ ; (c)  $\{1\} \times (0, 1)$  w  $((0, +\infty)^2, d_R)$ .
- Podać przykład zbioru  $A \subset \mathbb{R}$  takiego, że  $[0, 1)$  jest otwarty w  $(A, d_E)$ , ale zbiór  $A$  nie jest otwarty w  $(\mathbb{R}, d_E)$ .
- Obliczyć średnicę zbioru  $A$  w podanej metryce:  
(a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 4\}$ ,  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $d = d_M$ ;  
(b)  $A = [1, 2] \times [1, 2]$ ,  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $d = d_C$ ;  
(c)  $A = [0, 1] \times \{1\}$ ,  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $d = d_R$ .
- Podać przykład zbioru nieograniczonego w podanej przestrzeni lub uzasadnić, że nie istnieje:  
(a)  $(\mathbb{R}^2, d_M)$ , (b)  $(\mathbb{R}^2, d_R)$ , (c)  $(\mathbb{R}^2, d_D)$ .
- Wykazać, że dla dowolnego  $x \in X$  i  $r \geq 0$  zachodzi nierówność

$$\text{diam } K(x, r) \leq 2r.$$

Znaleźć przykład przestrzeni metrycznej, w której równość nie musi zachodzić.

- Pokazać, że jeśli  $A$  jest ograniczony, to  $\text{diam } \text{Cl}(A) = \text{diam } A$ . Czy  $\text{diam } \text{Int}(A) = \text{diam } A$  dla dowolnego zbioru  $A$ ?