
Lista 6: Zupełność

Analiza i Topologia, semestr zimowy 2018/2019

1. Czy przestrzeń X z metryką dyskretną jest zupełna? Opisać wszystkie zbiory zupełne w tej przestrzeni.
2. Sprawdzić, korzystając z odpowiedniego twierdzenia (a nie z definicji), zupełność zbiorów w (\mathbb{R}, d_E) :

(a) $A = \{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}_1\} \cup \{1\}$ (b) $B = \{(x, \frac{1}{x^2+1}) : x \in \mathbb{R}\}$ (c) $C = K_E((0, 3), 1)$.

3. Czy przestrzeń metryczna (\mathbb{R}, ρ) , gdzie

$$\rho(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & x, y \in \mathbb{Q} \text{ lub } x, y \notin \mathbb{Q}, \\ |x| + |y|, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

jest zupełna?

4. Udowodnić, że jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną zupełną, to (X, d^*) , gdzie

$$d^*(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

też jest przestrzenią metryczną zupełną.

5. Wykazać, że jeśli (X, d) jest przestrzenią zupełną, a $A \subset X$ jest jej niepustym, domkniętym podzbiorem, to (A, d) też jest zupełna.
6. Wykazać, że jeśli ciąg w przestrzeni metrycznej (X, d) spełnia warunek $d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$, to spełnia warunek Cauchy'ego. Czy każdy ciąg spełniający warunek $d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon$ musi być Cauchy'ego?

Wskazówka: Czy istnieje ciąg w \mathbb{R} taki, że $|x_n - x_{n+1}| \rightarrow 0$, ale nie jest zbieżny (a tym bardziej nie jest Cauchy'ego)?

7. Podać przykład (o ile istnieje) przestrzeni metrycznej, które jest
 - (a) zupełna, ale nie ośrodkowa;
 - (b) ośrodkowa, ale nie zupełna;
 - (c) zupełna i ośrodkowa, ale nie jest zwarta;
 - (d) zupełna i zwarta, ale nie jest ośrodkowa.