Zadanie 1. W przestrzeni $\mathbb{R}$ dla podanych par zbiorów A i B wykonać działania $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A^c, B^c

a) $A = (-2, 3), B = (-\infty, 2]$; b) $A = [2, \infty), B = (-2, 0) \cup \{2, 3\}$.

Zadanie 2. Z ankiety przeprowadzonej wśród stu studentów wynika, że 75 studentów posiada smartfony, 45 posiada samochód, a 35 posiada samochód oraz smarfona. Ilu studentów ma albo samochód albo smartfona? Ilu studentów nie ma ani samochodu ani smartfona?

Zadanie 3. Wśród 120 studentów I roku Chemii 95 zna język angielski, 85 - język francuski a 40 - język rosyjski. Czy wśród nich musi znajdować się osoba, która zna trzy języki?

Zadanie 4. Wśród 140 studentów I roku Chemii 105 zna język angielski a 90 - język francuski. Ilu studentów musi znać rosyjski by miec pewność, ze istnieje conajmniej jedna osoba znająca 3 języki.

Zadanie 5. Liczba e może być zdefiniowana również jako suma nieskończonego szeregu $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \ldots$. Biorąc kilka pierwszych elementów tego szeregu oblicz kilka przybliżeń tej liczby. Dlaczego uwzględniając coraz więcej elementów szeregu otrzymamy coraz lepsze przybliżenie? (dla zainteresowanych: początkowe rozwinięcie liczby e to $2,718281828\ldots$).

Zadanie 6. W trakcie badań nad szybkością skurczu mięśni u żaby poddawanych różnym obciążeniom, A.W. Hill (laureat nagrody Nobla) wyznaczył związek pomiędzy w - wagą ciężaru umieszczonego na mięśniu (wyrażoną w gramach) a v - szybkością skurczu (w centymetrach na sekundę). Związek ten dany jest równaniem $(w + a)(v + b) = c$, gdzie a, b, c są stałymi. *i)* wyznacz v jako funkcję w, *ii)* dla danych wartości $a = 15, b = 1$ i $c = 90$ oblicz szybkość skurczu jeśli mięsień obciążymy ciężarem o wadze 16 gramów.

Zadanie 7. Opublikowany w 1919 roku przez Jamesa Arthura Harrisa i Francisco Benedicta wzór na BMR (basal metabolic rate, dzienną energię potrzebną do zapewnienia podstawowej przemiany materii) dany jest wzorem: $BMR(w\ kcal) = 66,47 + 13,7M + 5,0W – 6,76L$ (dla mężczyzn) i $BMR(w\ kcal) = 655,1 + 9,567M + 1,85W – 4,68L$ (dla kobiet), gdzie: M – oznacza masę ciała w kilogramach, W – wzrost w centymetrach, L – wiek w latach. Oblicz BMR 20-letniego mężczyzny o wzroście 180 cm i wadze 80kg. Ile kilogramów waży jego rówieśnik, jeśli mają ten sam BMR ale wzrost kolegi to 160 cm?

Zadanie 8. Zmodyfikowany w 1990 roku wzór na BMR (Mifflin, St. Jeor) dany jest wzorem: $BMR(w\ \ kcal) = 10M + 6,25W - 5L + 5$ (dla mężczyzn) i $BMR(wkcal) = 10M + 6,25W - 5L - 161$ (dla kobiet), gdzie: M – oznacza masę ciała w kilogramach, W – wzrost w centymetrach, L – wiek w latach. Dla danego wieku (L), wyznacz związek między masą i wzrostem dający takie same wyniki w powyższym wzorze i wzorze Harrisa-Benedicta.

Zadanie 9. Prosty wzór na drogę hamowania samochodu wyraża się następująco:

$$a_H = \frac{V^2}{2S_H}$$

gdzie V - to prędkość w chwili uderzenia w przeszkodę, S_H -droga hamowania kolizyjnego (czyli długość strefy odkształcenia pojazdu w kolizji, a a_H - to opóźnienie w kolizji (czyli przyspieszenie ujemne jakie działa na elementy pojazdu). Wiedząc, że w chwili uderzenia w barierkę samochód jechał z przepisową prędkością 50 $\frac{km}{h}$ a po zderzeniu zgniecone zostało ok 80 cm pojazdu oblicz: a) jakie było przyspieszenie ujemne działające na osoby w samochodzie; b) wyraź to przyspieszenie w terminach g (przyspieszenia ziemskiego). Dla przypomnienia $g = 9,81\ \frac{m}{s^2}$; c) jaka siła działała na pasażera w samochodzie. Przyjmijmy, że pasażer ważył 80 kg. Dla przypomnienia $F = ma$. Gdyby sytuacja opisana w poprzednim zadaniu zdarzyła się kilkadziesiąt lat temu (kiedy samochody były budowane bardziej "pancernie") odkształcenie wyniosłoby tylko 20 cm. Odpowiedz na poprzednie pytania z tak zmienionymi danymi. Kiedy pasażer miał większą szansę przeżycia.

Zadanie 10. Rozłóż na możliwie najprostsze czynniki:

$$9x^2-4;\quad x^2+6x+5;\quad 3x^2-2x-7;\quad -2x^2+3x-4.$$

Zadanie 11. Uprość (o ile się da) następujące wyrażenia:

$$\frac{x}{3x^2+2x};\quad \frac{x^2-4}{x-2};\quad \frac{2x^2-3x+1}{x^2-3x+2};\frac{x^2+3x+2}{x^2+x+2}.$$

Zadanie 12. Rozwiąż nierówności:

$$x\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)<0;\quad \frac{(2x-3)(4x+1)}{x-2}\geqslant 0;\quad 3x^2-2x-1\geqslant 0;$$

$$|2x-\frac{1}{3}|>\frac{2}{3};\quad 0<|x-1|<0,5,\quad x^2-|x|>20.$$

Zadanie 13. Znajdź rozwiązanie poniższych nierówności posługując się geometryczną interpretacją wartości bezwzględnej:

$$|x+5|=5,\quad |x-5|<4;\quad |2x+8|\geqslant 4;\quad |x+2|\leqslant 3.$$

Zadanie 14. Znajdź rozwiązania poniższych równań:

$$\sqrt{x^2}=x;\quad \sqrt{(x-4)^2}=x+5;\quad \sqrt[3]{(x-1)^3}=x-x^2;\quad \sqrt[3]{(x+1)^6}=\sqrt[5]{(x+1)^5}.$$

Zadanie 15. Pewna firma wynajmuje wszystkie swoje 200 samochodów w cenie 115 zł. za każdy. Wzrost ceny wynajmu o każde 5 zł powoduje, że średnio mniej o 8 samochodów jest wynajęte. Jaka powinna być cena wynajmu samochodów, aby osiągnąć maksymalny zysk? Jaki to zysk?

Zadanie 16. Pewien hotel w Las Vegas wynajmuje wszystkie swoje 300 pokoi, jeżeli cena wynosi 80$ za pokój. Wzrost tej ceny o każdego dolara powoduje, że o 3 pokoje mniej jest wynajęte. Obsługa jednego pokoju kosztuje 10$ dziennie. Jaka powinna być optymalna cena pokoju, aby zysk był największy? Jaki to zysk?

Zadanie 17. Znajdź pierwiastki nastepujących wielomianów:

$$x^3-2x^2-5x+6,\quad x^3+5x^2-9x-45,\quad -2x^3-2x^2-6x,\quad x^4-34x^2+225.$$

Zadanie 18. Jeśli liczba x stanowi 75 % liczby y, to jakim procentem liczby x jest liczba y?

Zadanie 19. Cenę pewnego towaru obniżono o 20%. Towar nie sprzedał się i obniżoną cenę podniesiono o 20%. Jaka jest cena (w stosunku do pierwotnej) po tej operacji?

Zadanie 20. Cenę pewnego towaru podniesiono dwukrotnie o ten sam procent. Jeśli po tej dwukrotnej podwyżce cena wzrosła o 21% w stosunku do ceny pierwotnej, to o ile procent podnoszono cenę za każdym razem?

Zadanie 21. Ile wynosi 4 % odwrotności różnicy kwadratów liczb 25 i 15?

Zadanie 22. O ile procent wzrośnie pole koła, jeżeli jego obwód zwiększymy o p %?

Zadanie 23. Zmieszano a litrów płynu zawierającego p % alkoholu i b litrów płynu zawierającego q % alkoholu. Ile procent alkoholu zawiera mieszanina?

Zadanie 24. Niemiecki fizjolog E.H. Weber szukał odpowiedzi na następujące pytanie: Jak bardzo musi wzrosnąć poziom bodźca (np. światło, dźwięk, odczucie ciężaru itp.) odbieranego przez organizm by została przezeń odczuta zmiana. Prawo przezeń sformułowane głosi: stosunek danego poziomu bodźca (s) do minimalnego poziomu odczuwalnej zmiany (Δs) jest stały, tzn.

$$\frac{\Delta s}{s} = k,$$

gdzie k jest stałą. i) wyraź Δs jako funkcję s, ii) z badań nad odczuwaniem własnej wagi wynika, że stała k jest równa $\frac{1}{30}$. Zakładając, że ważysz 60 kg, jaka zmiana wagi będzie odczuwalna?
Zadanie 25. Badając prędkość skurczu mięśni u żab przy różnych obciążeniach, badacze W.O. Fems i J. Marsh odkryli, że prędkość skurczu mięśnia maleje wraz ze wzrostem obciążenia. Dokładnie, odkryli oni, że prędkość skurczu S (liczona w cm na sek.) i obciążenie mięśnia w (w gramach) powiązane są wzorem

$$S(w) = \frac{26 + 0,06w}{w}, \qquad w \geqslant 5.$$

Narysuj wykres S.
Zadanie 26. Francuski lekarz Poiseuille odkrył, że prędkość przypływu krwi w tętnicach jest większa w środku tętnicy niż przy jej ściance. Dalsze eksperymenty wykazały, że prędkość v (liczona w centymetrach na sekundę) w punkcie x centymetrów od środka tętnicy wyraża się wzorem

$$v = f(x) = 1000 * (0,04 - x^2), \quad 0 \leqslant x \leqslant 0,2.$$

Narysuj wykres tej funkcji.
Zadanie 27. W pewnym eksperymencie biolog chce przygotować specjalną dietę dla zwierzą eksperymentalnych. Są możliwe dwa rodzaje pożywienia: A i B. Mieszanka A zawiera 20% białka, a mieszanka B zawiera 10%. Jaka mieszanka tych dwóch składników zapewni 20 gramów biała. Niech x oznacza ilość składnika A, a y oznacza ilość B. Napisz równanie wiążące x, y. Narysuj odpowiedni wykres.
Zadanie 28. Wykonaj następujące działania na liczbach zespolonych $i)$ $(2+3i)+(5-8i)$ $ii)$ $(1-i)\cdot(3+2i)$ $iii)$ $\frac{3}{i}$ $iv)$ $\frac{(2-i)}{-i}$ $v)$ i^3 $vi)$ i^4 $vii)$ i^6.
Zadanie 29. Znajdź pierwiastki następujących równań

a) $x^2 - 4x + 5 = 0$; b) $x^3 - 2x + 5x = 0$; c) $x^3 + 1 = 0$; d) $2x^4 - 2 = 0$.

Andrzej Raczyński