

**Zadanie 30.** Naszkicuj wykresy poniższych funkcji

$$x^3 - x, \frac{1}{-x+3}, \frac{x-2}{x}, (x-2)(-x+3)^2, \sin 2x, \cos(x-\pi), \operatorname{tg} \frac{1}{2}x.$$

Czy istnieją funkcje odwrotne do podanych?

**Zadanie 31.** Naszkicuj w układzie współrzędnych wykres funkcji  $f(x) = (x-2)(x+3)$ . Dla tej funkcji narysuj wykresy funkcji

$$f(-x), f(2x), f\left(\frac{x}{3}\right), f(x-4), f(|x|), |f(x)|, \frac{1}{f(x)}, f^{-1}(x) \text{ (dla } x > 1).$$

**Zadanie 32.** Dla funkcji  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = \frac{x}{1+x}$ ,  $h(x) = \sqrt{x}$ ,  $p(x) = \ln x$ ,  $q(x) = x^2$ , znajdź złożenia następujących funkcji:

$$p(q(x)), q(p(x)), f(g(h(x))), g(p(f(q(x))))), h(q(g(f(x))))),$$

oraz wyznacz ich dziedziny.

**Zadanie 33.** Przedstaw jako złożenie co najmniej 3 funkcji następujące przykłady funkcji:

$$5 \sin(\sqrt{x^2}), 2 + \log(\cos(x^2 - 1)), 4 - \sqrt{\left(\frac{x-2}{x^2}\right)^3}, \frac{|x|+1}{|x|}.$$

**Zadanie 34.** Wyznacz dziedziny funkcji:

$$f(x) = \frac{3}{x^2-4} - \frac{1}{2^x-1}, \quad g(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}} - 1},$$

$$h(x) = \sqrt{2x+1} + \log(x^2 - 2x), \quad i(x) = \log\left(\frac{x}{x-1} + 1\right) + \sqrt{1 + \log_2 x}.$$

**Zadanie 35.** Naszkicuj wykresy funkcji oraz funkcji do nich odwrotnych (o ile jest to możliwe):

$$2^{-x} + 1, \quad 1 - e^x, \quad |2^x - 3|, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}, \quad |\log_2 x|, \quad \log_{\frac{1}{2}} |x|, \quad \log_{\frac{1}{2}}(x-1) + 2, \quad \ln(1-x).$$

Oblicz wzory funkcji odwrotnych do danych.

### *Funkcja wykładnicza i logarytmiczna*

**Zadanie 36.** Rozwiąż równania:

$$2^{x-4} \cdot 8^{3-2x} = 4^{3x-3}; \quad 7^{5x} - 7^{5x-1} = 6; \quad 2^{x+2} + 8 \cdot 2^{-2-x} = 6; \quad 3^{x+1} - 11 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3 \cdot 9^{-x} = -5.$$

**Zadanie 37.** Rozwiąż nierówności:

$$3^{\frac{x-3}{3x-2}} < \frac{1}{3}; \quad 2^{-x+1} < 4^{x^2}; \quad 4^{x+1} - 3 \cdot 2^{x+2} < 16; \quad 5 \cdot 4^x - 4 \cdot 5^{2x} < 10^x.$$

**Zadanie 38.** Przedstaw następujące wyrażenia za pomocą logarytmu z pojedynczej liczby:

$$\ln 2 + \ln 3; \quad \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 8); \quad \ln 15 - \ln 3; \quad \ln 20 - \frac{1}{3}(\ln 16 + \ln 4).$$

**Zadanie 39.** Uprość następujące wyrażenia

$$\ln x^3 - \ln x; \quad \ln e^x; \quad \ln e^{x^2+3} - \ln e^x; \quad \ln(x^5 - 3x^2) + 2 \ln x^{-1} - \ln(x^3 - 3).$$

**Zadanie 40.** Rozwiąż równania:

$$2 \log(x-3) - \log(x-2) = \frac{1}{2} \log 0,25; \quad 4 - \log x = 3\sqrt{\log x}; \quad \log^2 x - \log x^3 + 2 = 0; \quad x^{\log x} = 100x.$$

**Zadanie 41.** Rozwiąż nierówności:

$$\log_2(x+2) + \log_2(x-1) > 2; \quad |3 - \log_2 x| < 1; \quad \log_2(x+2) < 2; \quad 2(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - 9 \log_{\frac{1}{2}} x + 4 > 0.$$

**Zadanie 42.** Ciśnienie gazu na wysokości  $h$  powyżej poziomu morza można obliczyć za pomocą równania barometrycznego

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$$

gdzie  $M$  jest masą molową gazu,  $p_0$  - ciśnieniem na poziomie morza a  $g$ ,  $T$  i  $R$  to stałe. Wyraż  $h$  za pomocą pozostałych zmiennych.

**Zadanie 43.**  $pH$  roztworu wodnego dane jest wzorem  $pH = -\log_{10}[H^+]$ , gdzie  $[H^+]$  to stężenie kationów wodorowych podane w jednostkach  $\frac{mol}{dm^3}$ . Oszacuj liczbę moli kationów wodorowych w 2,5 litra roztworu, jeśli wiemy, że  $pH$  roztworu waha się między 8 i 9.

**Zadanie 44.** Pewna kultura bakterii podwaja swoją liczebność co pół godziny. Napisz równanie na liczbę bakterii  $N$  w kulturze jako funkcję czasu  $t$  zakładając, że na początku było 1000 bakterii. Narysuj wykres.

**Zadanie 45.** Użycie środka DDT jest zabronione obecnie w wielu krajach z powodu długoterminowego szkodliwego wpływu na środowisko naturalne. Okres połowicznego rozkładu DDT wynosi 12 lat. Farmer w USA rozsypał na swoim polu 20 kg tego środka w 1972 roku. Ile DDT jest jeszcze aktywne? Kiedy ilość aktywnego DDT na polu będzie wynosiła mniej niż 10 gramów?

**Zadanie 46.** Wprowadzona chora komórka do organizmu zdrowej myszy podwaja się po  $\frac{1}{2}$  dnia. Pod koniec dnia te dwie komórki dzielą się na cztery. To podwajanie trwa aż do momentu gdy liczba chorych komórek przekroczy jeden miliard, gdyż wtedy mysz umiera.

a) Napisz równanie na liczbę zakażonych komórek po  $t$  dniach.

b) Ile dni żyje mysz od momentu zakażenia?

**Zadanie 47.** W wielu krajach prędkość przyrostu naturalnego wynosi 3% rocznie. Po ilu latach ludność w takim kraju podwoi się? *Wskazówka:* Użyj składanego modelu wzrostu  $P = P_0(1+r)^t$ .

**Zadanie 48.** Powtórz poprzednie zadanie używając ciągłego modelu wzrostu  $P = P_0 e^{rt}$ .

*Andrzej Raczyński*