

Granica funkcji

Zadanie 49. Naszkicuj wykresy podanych funkcji i oblicz podane granice, o ile istnieją:

$$a) f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 1, \\ 2, & 1 \leq x < 3, \\ 3, & 3 \leq x \leq 5, \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x);$$

$$b) f(x) = \begin{cases} -x - 1, & x \leq -1, \\ 1 - x^2, & -1 < x < 1, \\ x - 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

Zadanie 50. Oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^3 - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x + 1} - 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{\sqrt{x^4 + x^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2 - x + 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^4 - 5x + 1 - \frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}}.$$

Zadanie 51. Oblicz granice:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} \quad b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 7}{x - 4} \quad c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} + 2 \quad d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} \quad e) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x) - 1}{x} \quad g) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} \quad h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1} \quad i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16} \quad k) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{27 - x^3}{x - 3} \quad l) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} \quad m) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \quad n) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3} \quad p) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x - 1} - 1} \quad r) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{x} \quad s) \lim_{x \rightarrow 25} \frac{5 - \sqrt{x}}{x + 25} \quad t) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} \quad u) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{(x - 1)^2}$$

$$v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \quad w) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x} \quad x) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x}{x} \quad y) \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \ln(\sin^3 x) - 6 \ln x \quad z) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

Zadanie 52. Cena produkcji pewnego rodzaju płyt kompaktowych jest dana równaniem

$$C(x) = 80000 + 12x,$$

gdzie x jest liczbą wyprodukowanych płyt CD. Średni koszt płyty otrzymamy dzieląc $C(x)$ przez x . Oblicz średni koszt produkcji 1000 płyt, 100000 płyt oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{C}(x)$. Przy jakiej produkcji średni koszt produkcji płyty jest mniejszy niż 20 zł?

Ciągłość funkcji

Zadanie 53. Zbadaj ciągłość następujących funkcji

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x^2, & 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & |x| \leq 1, \\ |x - 1|, & |x| > 1. \end{cases}$$

Zadanie 54. Dobierz parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby podane funkcje były ciągłe

$$a) f(x) = \begin{cases} bx, & x < \pi, \\ \frac{\sin x}{ax}, & x \geq \pi, \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} bx + 3, & x < 1, \\ 2x^3 + x + a, & x \geq 1. \end{cases}$$

Pochodna funkcji

Zadanie 55. Oblicz pochodne następujących funkcji:

$$9x^7 + 3x^{-5}, -3x^{-11}, \quad \sqrt[5]{x^2} + \frac{4}{x^3}, \quad (2\sqrt[3]{x^2} - x)(4\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[3]{x^5} + x^2), \quad \frac{2}{x^3\sqrt{x}}(x^4 - 8), \quad \frac{3}{3x - 2}, \quad \frac{5x^5 + x - 2}{x^2 + 7},$$

$$\frac{8x^3}{x^3 + x - 1}, \quad \frac{\sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}, \quad \frac{x \sin x}{1 + \operatorname{tg} x}, \quad 2x + \cos x, \quad \frac{e^x + x^3}{3x^3 e^x + 2}.$$

Zadanie 56. Oblicz pochodne następujących funkcji używając wzoru na pochodną funkcji złożonej:

$$3x(x^2 + 1)^3, \quad \frac{(x^3 - 7)^4}{2x^3}, \quad \ln(x^4 + x), \quad 3x\sqrt{2x^2 + 3}, \quad \sin(2x^2 - 4).$$

Zadanie 57. Wyznacz punkty krytyczne funkcji

$$x^2(x - 5)^3, \quad \frac{x}{(2x + 5)^2}, \quad \sqrt{x^2 - 8x + 20}.$$

Zadanie 58. Niech $f(x) = x^2 + x$. Znajdź współczynnik kierunkowy prostej łączącej punkty $(1, f(1))$ i $(3, f(3))$. Napisz równanie stycznej w punkcie $(1, f(1))$.

Zadanie 59. Ilość bakterii y w pewnej kolonii po czasie x zadana jest przybliżoną formułą $y(x) = (3 \times 10^6) \left(1 - \frac{1}{(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}}\right)$. Oblicz $y'(x)$.

Zadanie 60. Pewne jezioro jest zanieczyszczone bakteriologicznie. Po zastosowaniu pewnych środków odkażających zaobserwowano, że koncentracja bakterii w wodzie (mierzona liczbą bakterii w 1 cm^3) po czasie t wynosi

$$C(t) = 500(8 - t)^2.$$

Oblicz $C'(t)$, $C'(1)$, $C'(6)$.

Zadanie 61. Wyznacz przedziały malenia i wzrostu oraz lokalne ekstrema dla następujących funkcji:

$$\frac{x - 1}{x + 2}, \quad x + \frac{4}{x}, \quad \frac{x^2}{x - 2}, \quad x^4(x - 6)^2, \quad 2\sqrt{x} - x \quad (x > 0).$$

Zadanie 62. Po zastosowaniu zastrzyku domięśniowego, stężenie lekarstwa w krwiobiegu pacjenta po czasie t opisane jest wzorem

$$C(t) = 0,16 \cdot \frac{t}{t^2 + 4t + 4} \quad 0 < t < 12.$$

Znajdź wartości krytyczne funkcji $C = C(t)$ oraz przedziały, gdzie stężenie rośnie i gdzie maleje.

Andrzej Raczyński