Zadanie 63. Korzystając z reguły de L'Hospitala, obliczyć granice funkcji:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\quad b)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln\sin x}\quad c)\ \lim_{x\to-\infty}\left(x(e^{\frac{1}{x}}-1)\right)\quad d)\ \lim_{x\to 0^+}x^{\sin x}$$

$$e)\ \lim_{x\to 1^-}\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)\ln(1-x)\quad f)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}.$$

Zadanie 64. Oblicz granice:

$$a)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\ b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}\ c)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}\ d)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}\ e)\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}\ f)\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\ 2x}{x}$$

$$g)\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\ x-\sin x}{\sin^3 x}\ h)\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\ i)\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}\ j)\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}\ k)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x}\ l)\lim_{x\to 0}\frac{\sin^4 x}{x^5}$$

Globalne minima i maksima

Zadanie 65. Znajdź globalne minimum i maksimum podanych funkcji w odcinkach:

a) $f(x) = (x-1)(x-5)^3 + 1, \qquad [0,3], [1,7], [3,6].$

b) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16, \qquad [-1,3], [0,2], [-3,4].$

Zadanie 66. Do wody w pewnym miejskim kąpielisku systematycznie dodawane są środki chemiczne, aby kontrolować masowy rozwój bakterii w wodzie. Po t dniach od momentu odkażania koncentracja bakterii w 1 cm^3 wody zadana jest wzorem

$$C(t) = 30t^2 - 240t + 500, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 8.$$

Ile dni po odkażaniu koncentacja bakterii jest najmniejsza i ile wynosi?

Zadanie 67. Wiadomo z eksperymentów, że wysokość (w centymetrach) pewnej rośliny po upływie t miesięcy opisana jest w przybliżeniu wzorem

$$H(t) = 40t^{\frac{1}{2}} - 20t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2.$$

Ile czasu musi upłynąć, aby ta roślina osiągnęła maksymalną wysokość? Jaka to wysokość?

Zadanie 68. Dwa zakłady przemysłowe A_1 i A_2 położone są w odległości 10 km od siebie i emitują zapylenie do atmosfery. Zapylenie (liczone w ilości cząsteczek na milion) maleje odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości od źródła. Dodatkowo, zakład A_1 emituje 8 razy więcej zapylenia niż zakład A_2. Wykonaj prosty rysunej i wyjaśnij dlaczego gęstość zapylenia w punkcie x pomiedzy tymi zakładami wyraża się wzorem

$$C(x) = \frac{8k}{x^2} + \frac{k}{(10-x)^2}, \qquad 0,5 \leqslant x \leqslant 9,5 \qquad k > 0.$$

Jak daleko od A_1 gęstość zapylenia jest najmniejsza i ile ona wynosi?

Zadanie 69. Badania socjologiczne pokazują, że poparcie dla nowego rządu w pewnym kraju (liczone w milionach osób) wzrasta według wzoru

$$N(t) = 30 + 12t^2 - t^3$$

gdzie czas t jest liczony w latach. Kiedy poparcie rządu jest największe?

Zadanie 70. Jakiej wielkości kwadraty należy wyciąć na rogach prostokątnego arkusza kartonu o wymiarach $a = 30$ cm, $b = 24$ cm, aby pojemność otrzymanego po sklejeniu pudełka była największa?
Zadanie 71. Wydajność tlenku azotu NO z mieszaniny $a\%$ tlenu i $(100-a)\%$ azotu w temperaturze 1600°C i pod ciśnieniem normalnym określa wzór

$$x(a) = \sqrt{Ka(100-a)} - 25K,$$

gdzie K jest stałą równowagi reakcji dla danej temperatury i danego ciśnienia. Oblicz, przy jakiej procentowej zawartości tlenu w mieszaninie wydajność tlenku azotu będzie maksymalna.
Zadanie 72. Znajdź minima globalne dla $x > 0$ dla następujących funkcji

$$\frac{e^x}{x}, \qquad \frac{1-5\ln x}{x}.$$

Zadanie 73. Znajdź maksima globalne dla $x > 0$ dla następujących funkcji

$$\frac{x^2}{e^x}, \qquad \frac{1+2\ln x}{x}.$$

Druga pochodna funcji

Zadanie 74. Zbadaj przebieg zmienności następujących funkcji i narysuj ich wykresy

$$2x^6 - 3x^5, \quad \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{x}{x^2-4}, \quad \frac{\ln x}{x}, \quad e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Zadanie 75. Znajdź lokalne minima i maksima oraz punkty przegięcia następujących funkcji:

$$x^3 - 6x^2 + 16, \quad (2-x)^3 + 1, \quad x^3 - 12x, \quad \frac{1}{x^2+12}, \quad \frac{x}{x^2+12}, \quad \frac{x^2}{x^2+12}.$$

Zadanie 76. Do kolonii bakterii wprowadzono pożywkę stymulującą ich rozmnażanie. Ilość bakterii w czasie t zadana jest wzorem

$$N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 20.$$

Kiedy prędkość wzrostu populacji $N'(t)$ rośnie, a kiedy maleje? Znajdź punkty krytyczne N i określ ich rodzaj. Naszkicuj wykresy N i N' w tym samym układzie współrzędnych. Kiedy prędkość wzrostu populacji jest największa?
Zadanie 77. Zależność drogi s od czasu t w pewnym ruchu prostoliniowym dana jest równaniem $s = t^2 - 2t - 8$. Wyznaczyć prędkość średnią od chwili $t_1 = 4$ do chwili $t_2 = 4 + h$, a następnie prędkość w chwili $t_1 = 4$.

Pochodne funcji wielu zmiennych

Zadanie 78. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji

$$\sqrt{x^2+y^2}, \; xe^{y\log z}, \quad 4^{x^2+4y+x\sqrt{z}}, \; \log\sqrt{x^2+y^2+3}.$$

Zadanie 79. Oblicz gradient dla funkcji z poprzedniego zadania. Znajdź punkty krytyczne.
Zadanie 80. Obliczyć minimum i maximum lokalne funkcji

$$((x^2-4)(x^2-16)+75)(y^2+1), \quad (2+y^2)e^{x^2}.$$

Współrzędne log-log

Zadanie 81. Z doświadczenia wynika, że masa serca (S) powiązana jest z masą ciała (M) następującą relacją

$$S(M) = 0,0082M^{0,91}. \tag{1}$$

Naszkicuj wykres tej zależności w układzie zmiennych $log - log$. Jakim wzorem powinna wyrażać się masa ciała w stosunku do masy serca? Co z tej relacji wynika dla małych i dużych zwierząt?

Zadanie 82. Częstość skurczów serca (C) powiązana jest z masą ciała (M) następującą relacją

$$C(M) = 155,8M^{-0,23}. \tag{2}$$

Naszkicuj wykres tej zależności w układzie zmiennych $log - log$. Co można powiedzieć o częstości skurczów serca u kolibra i słonia?

Andrzej Raczyński