# *Całki nieoznaczone*

**Zadanie 83.** Oblicz następujące całki nieoznaczone:

$$\int \frac{du}{2u^5},\quad \int 8t^{1/3}\,dt,\quad \int\left(3\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx,\quad \int\left(\sqrt{x^5}-\frac{4}{x^3}\right)dx,\quad \int\frac{e^x-3x}{4}\,dx,\quad \int(3z^{-2}-z^{-1})\,dz.$$

**Zadanie 84.** Znajdź funcję $y=y(x)$ spełniającą poniższe równanie i warunek początkowy:
a) $y'=2x-3$, $y(0)=5$; b) $y'=20/\sqrt{x}$, $y(1)=40$;
c) $y'=2x^{-2}+3x^{-1}-1$, $y(1)=0$; d) $y'=100/t^2$, $y(1)=400$.

**Zadanie 85.** Znajdź funkcje spełniające poniższe równania i warunki początkowe
a) $\frac{dy}{dx}=\frac{5x+2}{\sqrt{x}}$, $y(1)=0$; b) $\frac{dR}{dx}=\frac{1-x^4}{x^3}$, $R(1)=4$; c) $\frac{dx}{dt}=\frac{\sqrt{t^3}-t}{\sqrt{t^3}}$, $x(9)=4$.

**Zadanie 86.** Pewna kompania naftowa, opierając się na trzyletnich doświadczeniach, oszacowała, że prędkość wydobycia ropy naftowej z nowego złoża opisana jest wzorem

$$R(t)=\frac{100}{t+1}+5,\quad 0\leqslant t\leqslant 20,$$

gdzie $R(t)$ prędkością wydobycia liczoną w tysiącach litrów po czasie $t$ lat od momentu rozpoczęcia wydobycia. Znajdź wzór $Q(t)$ na ilość litrów ropy wydobywanych przez pierwsze $t$ lat, jeżeli $Q(0)=0$. Ile litrów ropy będzie wydobywane przez pierwsze 9 lat?

**Zadanie 87.** Kultura drożdży rośnie z prędkością $W'(t)=0,2e^{0,1t}$ grama na sekundę. Jaka będzie masa tej kultury bakterii po czasie $t$ godzin, jeżeli na początku było 2 gramy bakterii?

**Zadanie 88.** Z dziury tankowca, który wpłynął na rafę koralową wypływa ropa tworząc na oceanie plamę rosnącą z prędkościa $(dR/dt)=60/\sqrt{t+9}$, gdzie $R$ jest promieniem plamy po czasie $t$ minut. Oblicz promień plamy ropy naftowej $R(t)$ jeżeli $R(0)=0$.

**Zadanie 89.** Prędkość gojenia się rany pooparzeniowej opisana jest przybliżonym wzorem

$$\frac{dA}{dt}=-4t^{-3},\quad 1\leqslant t\leqslant 10,$$

gdzie czas $t$ liczony jest w dniach, a $A(1)=5\,\mathrm{cm}^2$. Oblicz powierzchnię rany po 10 dniach.

**Zadanie 90.** Inny wzór na prędkość gojenia się rany (w cm kwadratowych na dzień) ma postać $A'(t)=-0,9e^{0,1t}$. Znajdź wzór na powierzchnię rany po czasie $t$ dni jeżeli na początku rana miała 10 cm $^2$.

# *Całkowanie przez części*

$$\int f'(x)g(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx$$

**Zadanie 91.** Oblicz całki

$$\int xe^{3x}\,dx,\quad \int x^3\ln x\,dx,\quad \int x^2e^x\,dx,\quad \int x(\ln x)^2\,dx,\quad \int x\sqrt{x+4}\,dx,\quad \int\frac{x}{\sqrt{x-2}}\,dx.$$

# *Całkowanie przez podstawienie*

**Zadanie 92.** Stosując odpowiednie podstawienie oblicz całki:

$$\int (x^2-4)^2 2x\,dx,\quad \int e^{4x}4\,dx,\quad \int \frac{1}{10x+7}\,dx,\quad \int \frac{x^2}{(4-x^3)^2}\,dx,\quad \int \frac{1+x}{4+2x+x^2}\,dx,$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{2x^4+3}}\,dx,\quad \int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx,\quad \int \frac{1}{x^2}e^{-1/x}\,dx,\quad \int \frac{1}{x\ln x}\,dx,\quad \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx.$$

# *Całki oznaczone*

**Zadanie 93.** Oblicz całki oznaczone:

$$\int_2^3 x\sqrt{2x^2-3}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{x-1}{x^2-2x+3}\,dx \qquad \int_{-1}^1 \frac{e^{-x}-e^x}{(e^{-x}+e^x)^2}\,dx \qquad \int_7^8 \frac{\ln(t-5)}{t-5}\,dt.$$

*Wartością średnią funkcji $f = f(x)$ na odcinku $[a, b]$ nazywamy*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

**Zadanie 94.** Całkowity koszt (w dolarach USA) wyprodukowania $x$ karoserii pewnego samochodu wynosi

$$C(x) = 60000 + 300x.$$

a) Oblicz średni koszt jednej karoserii, jeżeli wprodukowano 500 karoserii (Średni koszt jednej karoserii to $\bar{C}(x) = C(x)/x$).
b) Oblicz wartość średnią funkcji kosztów na odcinku $[0, 500]$.
**Zadanie 95.** Stężenie lekarstwa w krwioobiegu pacjenta po czasie $t$ opisana jest wzorem

$$C(t) = \frac{0,14t}{t^2+1}.$$

Oblicz średnie stężenie lekarstwa w krwioobiegu w ciągu pierwszej godziny od zastrzyku. Oblicz średnie stężenie lekarstwa w krwioobiegu w ciągu pierwszych dwóch godzin od zastrzyku.

# *Całka niewłaściwa*

**Zadanie 96.** Oblicz całki niewłaściwie:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}},\quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^4},\quad \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^{2/3}},\quad \int_0^\infty e^{-x}\,dx,\quad \int_1 \infty \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

**Zadanie 97.** Po przyjęciu lekarstwa organizm zazwyczaj nie przyswaja go w całości. Jedyną metodą na stwierdzenie ilości przyswojonego lekarstwa jest zmierzenie prędkości z jaką lekarstwo jest usuwane z organizmu. Załóżmy, że prędkość wydalania lekarstwa z organizmu (mililitrach na minutę) zadana jest wzorem

$$R(t) = te^{-0,2t}$$

gdzie $t$ jest czasem, który upłyną od momentu przyjęcia lekarstwa. Jak dużo lekarstwa jest usunięte z organizmu?

# *Pole obszaru na płaszczyźnie*

**Zadanie 98.** Znajdź pole obszaru pomiędzy wykresem funkcji $f(x) = x^2 - 2x$, a osią $X$ na odcinku $[-1, 1]$.

**Zadanie 99.** Znajdź pole obszaru pomiędzy wykresami funkcji
a) $y = 5 - x^2$ i $y = 2 - 2x$, b) $y = -x$ i $y = 0$, $-2 \leqslant x \leqslant 1$,
c) $y = 8 + 4x - x^2$ i $y = x^2 - 2x$, d) $y = x^3$ i $y = 4x$,
e) $y = 8/x$ i $y = x^2$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, f) $y = x^3 + 1$ i $y = x + 1$.

**Zadanie 100.** Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi:
a) $y = x - \ln x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = e$; b) $y = 1 - \ln x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4$;
c) $y = (x-2)e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$; d) $y = (3-x)e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$.

# *Całki dwóch zmiennych*

**Zadanie 101.** Oblicz całki

$$a) \int\int e^{x+2y} dxdy, \quad b) \int\int x^5 y - x^7 dxdy, \quad c) \int\int x e^{xy} dxdy, \quad d) \int\int x^2 \sin(xy) dxdy.$$

**Zadanie 102.** Oblicz całki:

$$a) \int_1^2 \int_{-1}^3 e^{x - \log y^2} dxdy, \quad b) \int_1^2 \int_1^e xy \ln \frac{x}{y} dxdy.$$

*Andrzej Raczyński*