Równania różniczkowe

Zadanie 103. Znaleźć rozwiązania ogólne następujących równań różniczkowych i naszkicować ich wykresy dla różnych stałych C.
a) $y' = e^{x+y}$, b) $y' = \sqrt{x}/y$, c) $y' = \sqrt{y/x}$, d) $y' = (y+1)/(x+1)$.

Zadanie 104. Znajdź rozwiązania następujących zagadnień początkowych:
a) $y' = 2,\ \ y(0) = 2$, b) $y' = y/x,\ \ y(1) = 5$, c) $y' = 1/y^2,\ \ y(1) = 3$,
d) $y' = -y^2e^x;\ \ y(0) = 1/2$, e) $y' = e^x/e^y,\ \ y(0) = \ln 2$,
f) $xyy' = \ln x,\ \ y(1) = 1$, g) $yy' = xe^{-y^2},\ \ y(0) = 0$,
h) $yy' = x(1+y^2),\ \ y(0) = 1$, i) $y' = (2-y)^2e^x,\ \ y(0) = 1$.

Zadanie 105. Pewna osoba uczy się pisać na maszynie. Niech N oznacza maksymalną liczbę słow jakie potrafi napisać ona napisać w ciągu minuty. Załóżmy, że prędkość zmian N jest proporcjonalna do różnicy pomiędzy N oraz górną granicą 140. Rozsądnym jest założyć, że na początku osoba ta nie potrafiła napisać żadnego słowa (tzn. $N(0) = 0$). Okazało się, że osoba ta potafi napisać 35 słów na minutę po 10 godzinach uczenia się.
a) Ile słów na minutę będzie pisać ta osoba po 20 godzinach uczenia się?
b) Jak długo musi ona ćwiczyć, aby napisać 105 słów na minutę?

Zadanie 106. Plotka rozprzestrzenia się w populacji liczącej 1000 osób z prędkością proporcjonalną do iloczynu liczby osób, które już słyszły tę plotkę oraz liczby osób, ktore jeszcze nie słyszały tej plotki. Załóżmy, że 5 osób rozprzestrzenia plotkę i po jednym dniu wie o niej już 10 osób.
a) Ile osób pozna tę plotkę po 7 dniach?
b) Ile czasu potrzeba, aby o plotce dowiedziało się 850 osób?

Zadanie 107. Wiadomo, że szybkość zmian temperatury danego ciała jest proporcjonalna do różnicy między temperaturą tego ciała i temperaturą otoczenia (prawo Newtona). Zakładamy, że $S(0) = 100^oC$ w temperaturze otoczenia 20^oC. Po dziesięciu minutach temperatura ciała wynosiła 60^oC. Po ilu minutach ciało będzie miało temperaturę 25^oC?

Zadanie 108. Ciało zamordowanego znaleziono o 19:30. Lekarz sądowy przybył o 20:20 i natychmiast zmierzył temperaturę ciała denata. wynosiła ona $32,6^o$ C. Godzinę później, gdy usuwano ciało, temperatura wynosiła $31,4^o$C. W tym czasie temperatura w pomieszczeniu wynosiła 21^oC. Najbardziej podejrzana osoba, która mogła popełnić to morderstwo – Jan G., twierdzi jednak, że jest nie winny. Ma alibi. Po połuniu był on w restauracji. O 17:00 miał rozmowę zamiejscową, po której natychmiast opuścił restaurację. Restauracja znajduje się 5 minut na piechotę od miejsca morderstwa. Czy alibi to jest niepodważalne?

Zadanie 109. *(Ciąg dalszy zadania poprzedniego).* Obrońca Jana G. zauważył, że zamordowany był u lekarza o 16:00 w dniu śmierci i wtedy jego temperatura wynosiła $38,3^o$C. Załóżmy, że taką temperaturę miał on w chwili śmierci. Czy można dalej podejrzewać, że Jan G. popełnił to morderstwo?

Zadanie 110. Rozwój populacji liczącej $M(t)$ osobników w chwili t można opisać równaniem Verhulsta $M'(t) = aM(t) - bM^2(t)$ (dla populacji ludzkiej, z dobrym przybliżeniem $a = 0,029$, $\quad b = 2,941 \cdot 10^{-12}$). Udowodnić, że $\lim_{t\to\infty} M(t) = a/b$. Określić dla jakiego t, $\quad M'(t)$ osiąga maksimum.

Zadanie 111. Załóżmy, że nowa pojedyncza cząsteczka C tworzy się z pojedynczych cząsteczek składników A i B ($A + B \to C$). Prędkość pojawiania się cząsteczek produktu C jest wprost proporcjonalna do iloczynu składników A i B. Napisz funkcję $C(t)$ jako funkcję t. Załóż, że początkowa koncentracja skałdników A to $a\ \frac{mol}{dm^3}$, składnika B - $b\ \frac{mol}{dm^3}$ i na początku nie ma żadnych czasteczek produktu C. Rozwiąż tak otrzymane zagadnienie. Jeśli $a = b$, to jak wygląda rozwiązanie? Ile związku C powstało po 20 sekundach?

Zadanie 112. Nietypową reakcja jest reakcja: $H_2 + Br_2 \to 2HBr$. Równanie które opisuje prędkość pojawiania się cząsteczek HBr dane jest wzorem

$$\frac{d[HBr]}{dt} = k[H]([Br])^{\frac{1}{2}}.$$

Napisz równanie dla $x(t) = [HBr]$. Załóż, że początkowa koncentracja składników A to a $\frac{mol}{dm^3}$, składnika B - b $\frac{mol}{dm^3}$ i na początku nie ma żadnych czasteczek HBr.
a) dla $a = b$ znajdź rozwiązanie równania.
Zadanie 113. Znaleźć rozwiązania ogólne następujących równań liniowych niejednorodnych:
a) $y' + xy = 5x$, b) $y' - 2y = 4x$.
Zadanie 114. Znaleźć rozwiązania ogólne równań:
a) $y'' - 4y' + 4y = 0$, b) $y'' - 3y' = 0$, c) $y'' - 3y' - 4y = 12$, d) $y'' + 2y' + y = 5$,
e) $y'' + y = 0$, f) $y'' - 4y' + 13y = 0$, g) $y'' + 4y = 0$.
Zadanie 115. Znaleźć rozwiązania szczególne następujących zagadnień początkowych:
a) $y'' + y - 2y = 6$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$; b) $y'' - 3y' - 10y = 100$, $y(0) = -10$, $y'(0) = 0$.
Zadanie 116. Znaleźć rozwiązania szczególne następujących zagadnień początkowych:
a) $x' = -x + y$, $y' = 2x$, $x(0) = 1$, $y(0) = 1$, b) $x' = x - y$, $y' = x - y$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.
Zadanie 117. Równanie różniczkowe $y'' + 5y' + 4y = 8$ jest typowym równaniem, które pojawia się przy badaniu krzywej uczenia się szczura w pewnym eksperymencie psychologicznym. Znajdź rozwiązanie szczególne tego równania spełniające warunki początkowe $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Oblicz granicę tego rozwiązania gdy $t \to \infty$.
Zadanie 118. Dwa gatunki zwierząt żyjące na pewnym obszarze współzawodniczą ze sobą o pożywienie. Ich populacja oznaczana odpowiednio przez $x(t)$ i $y(t)$ i liczona w tysiącach spełnia następujący system równań różniczkowych:

$$\frac{dx}{dt} = 0.09x - 0.02y, \quad \frac{dy}{dt} = -0.02x + 0.06y, \qquad x(0) = 200 \quad y(0) = 150,$$

gdzie t jest czasem mierzonym w latach. Znajdź rozwiązanie tego układu i zanalizuj zachowanie się rozwiązań gdy $t \to \infty$.
Zadanie 119. Znaleźć rozwiązania ogólne równań:
a) $y'' - 4y' + 4y = 0$, b) $y'' - 3y' = 0$, c) $y'' - 3y' - 4y = 0$, d) $y'' + 2y' + y = 0$.

Macierze

Zadanie 120. Wykonaj działania: $A \cdot B, B \cdot A, A \cdot B - C$, gdzie:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 121. Oblicz wyznaczniki macierzy: $A \cdot B, B \cdot A$ z poprzedniego zadania.
Zadanie 122. Rozwiązać układ równań

$$\begin{array}{rrrcl} x & -2y & +3z & = & 0 \\ -2x & +2y & & = & 1. \\ -x & & +3z & = & 1 \end{array}$$

Zadanie 123. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ i rozwiązać równanie $Ax = (2, 1)$.
Zadanie 124. Znaleźć macierz X spełniającą równanie $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$.

Andrzej Raczyński