

4.1 Dana jest tablica prawdopodobieństw 2×2

X	Y	
	y_1	y_2
x_1	p_{11}	p_{12}
x_2	p_{21}	p_{22}

i odpowiadający jej iloraz krzyżowy

$$\theta = \frac{p_{11}p_{22}}{p_{12}p_{21}}.$$

Pokaż, że prawdziwe są nierówności:

$$\theta > 1 \iff P(Y = y_1 | X = x_1) > P(Y = y_1 | X = x_2),$$

$$\theta > 1 \iff P(X = x_1 | Y = y_1) > P(X = x_1 | Y = y_2),$$

$$\theta < 1 \iff P(Y = y_1 | X = x_1) < P(Y = y_1 | X = x_2),$$

$$\theta < 1 \iff P(X = x_1 | Y = y_1) < P(X = x_1 | Y = y_2)$$

4.2 Udowodnij, że dla każdego $\theta > 0$ i dla każdego $0 < p < 1$ i $0 < q < 1$ istnieje tablica prawdopodobieństw 2×2

X	Y	
	y_1	y_2
x_1	p_{11}	p_{12}
x_2	p_{21}	p_{22}

taka, że jej iloraz krzyżowy jest równy θ i taka, że $p_{1+} \stackrel{df}{=} p_{11} + p_{12} = p$ oraz $p_{+2} \stackrel{df}{=} p_{12} + p_{22} = q$.

Spróbuj wyznaczyć taką tablicę dla $\theta = 1.5$, $p = 0.2$, $q = 0.6$

Wskazówka. Oznaczmy $p_{12} \stackrel{df}{=} x$. Pokaż, korzystając z własności Darboux, że równanie $f(x) = \theta$ ma zawsze rozwiązanie. Funkcja $f(x)$ jest zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \frac{(p-x)(q-x)}{x(x+1-p-q)}$$

4.3 Dane: Rozwój umysłowy i fizyczny uczniów.

Rozwój fizyczny	Rozwój umysłowy	
	dobry	zły
dobry	581	561
zły	209	351

Źródło. Pearson, K., (1906) *On the relationship of intelligence to size and shape of head, and to other physical and mental characters*, Biometrika, 5, 105-146

Oblicz iloraz krzyżowy θ dla tych danych. Zilustruj na ich podstawie nierówności, opisane w zadaniu 4.1, zastępując odpowiednie prawdopodobieństwa przez ich częstości. Co te nierówności oznaczają?

4.4 Przedstaw tę tablicę w postaci standaryzowanej i narysuj odpowiadający jej wykres kołowy. Jak wyglądałaby ta tablica w postaci standaryzowanej i odpowiadający jej wykres kołowy dla przypadku niezależności?

4.5 Zastosuj test χ^2 i test oparty na ilorazie krzyżowym θ dla testowania hipotezy niezależności dla tych danych.

4.6 Znajdź 95% przedział ufności dla θ .

4.7 Dla lewego i prawego końca tego przedziału zbuduj tablice w postaci standaryzowanej i narysuj odpowiadające im wykresy kołowe. Porównaj wykresy, otrzymane w punktach 4.4 i 4.7. Jak z tych wykresów odczytać zależność (niezależność) wierszy i kolumn?

4.8 Wykonaj to samo dla danych:

Dane: Liczba dobrze rozwiązanych zadań z matematyki

Płeć	Zadania	
	geometryczne	niegeometryczne
uczennice	21	29
uczniowie	22	32

Źródło. Wyniki matury próbnej z matematyki (poziom podstawowy) w III LO w Wałbrzychu w 2001 (informacja od nauczyciela)

Czy w tym przypadku należy mówić o hipotezie niezależności, czy jednorodności?