

Wykład 1

1. Sformułowanie problemu optymalizacyjnego

Z książki *Practical Optimization Methods : With Mathematica Applications* by : M.A.Bhatti ,
M.Asghar Bhatti

■ Przykład 1.1 (Zagadnienie transportowe)

Przedsiębiorstwo dostarcza towary spożywcze do dużego sklepu spożywczego. Sklep zgłasza zapotrzebowanie na co najmniej 150 m^3 mrożonek i 130 m^3 świeżych produktów. Przedsiębiorstwo dysponuje dwoma typami samochodów, z których każdy ma powierzchnię chłodniczą i powierzchnię do przewozu świeżych produktów. Pojemności obu typów samochodów (w m^3) i zużycie paliwa (w litrach) na dojazd do sklepu podane są w tabelce:

.	pow.chłod.	pow.świeża	zużycie
Typ I	15	25	300
Typ II	15	10	200

Ile samochodów należy użyć, aby zapewnić dostawę produktów przy minimalnych kosztach?

■ Przykład 2.1 (Portfel akcji)

Obserwujemy zyski (średnie zyski) w % z akcji $A_1, A_2, \dots, A_r$ w t okresach czasu. Chcemy skonstruować portfel z tych akcji w taki sposób, aby średni zysk wyniósł co najmniej p % przy minimalizacji ryzyka dużych strat. Rozwiązać to zagadnienie dla przykładu:

miesiąc	styc	luty	marz	średnia
AKCJE 1	10	8	- 3	5
AKCJE 2	6	8	4	6
AKCJE 3	4	5	6	5
AKCJE 4	9	8	- 5	4

■ Składniki zadania optymalizacyjnego

Aby sformułować zadanie optymalizacyjne należy :

1) wybrać zmienne, występujące w zadaniu

w przykładzie 1.1 zmiennymi są: liczba samochodów typu I (x_1) i liczba samochodów typu II (x_2);

w przykładzie 2.1 zmiennymi są frakcje akcji w portfelu ($x_1, x_2, \dots, x_r$)

2) określić funkcję celu, która wyraża wielkość, którą chcemy minimalizować (maksymalizować)

w przykładzie 1.1 funkcja celu wyraża zużycie paliwa;

w przykładzie 2.1 funkcja celu opisuje ryzyko dużych strat

3) podać ograniczenia typu nierówności

w przykładzie 1.1 ograniczeniami typu nierówności są: warunki określające minimalne wielkości dostawy mrożonek i świeżych produktów i nieujemność liczby samochodów I i II typu;

w przykładzie 2.1 oprócz nieujemności zmiennych występuje warunek na osiągnięcie zysku co najmniej $p\%$

4) podać ograniczenia typu równości

w przykładzie 1.1 takie ograniczenia nie występują

w przykładzie 2.1 suma frakcji musi być równa 1 (w portfelu są wyłącznie akcje spośród wymienionych rodzajów)

Obszar, spełniający wszystkie ograniczenia i mieszczący się w dziedzinie funkcji celu nazywamy **obszarem dopuszczalnym**.

Zapiszemy treść obu przykładów w postaci zadań optymalizacyjnych.

■ Przykład 1.1 (c.d.)

Zmienne: x_1 - liczba samochodów typu I, x_2 - liczba samochodów typu II; zmienne powinny przyjmować wartości całkowite;

Funkcja celu: $f(x_1, x_2) = 300x_1 + 200x_2$, $f = \min!$;

Ograniczenia typu nierówności: $15x_1 + 15x_2 \geq 150$, (dostawa mrożonek)
 $25x_1 + 10x_2 \geq 130$, (dostawa produktów świeżych)
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

■ Przykład 2.1 (c.d.)

Zmienne: $x_1, x_2, \dots, x_r$ - frakcje akcji w portfelu. Oznaczmy $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)^T$

Funkcja celu:

W tym przypadku określenie funkcji celu będzie wymagało pewnych rachunków. Zapiszmy dane o zyskach z akcji w postaci macierzy A :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rt} \end{pmatrix},$$

gdzie element a_{ij} oznacza zyski z akcji "AKCJA i" w okresie j . Oznaczmy przez m wektor wartości średnich dla akcji za analizowany okres. Łatwo wyrazić m poprzez A : $m = \frac{1}{t} A \mathbb{1}_t^T$, gdzie $\mathbb{1}_t$ jest wektorem, składającym się z t jedynek.

Zauważmy, że liczba $x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \dots + x_r a_{r1}$ jest oczekiwanym zyskiem przy zastosowaniu portfela x w pierwszym okresie. Podobnie, liczba $x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + \dots + x_r a_{r2}$ jest oczekiwanym zyskiem przy zastosowaniu portfela x w drugim okresie. Wektor $A^T x$ wyraża więc oczekiwane zyski, jakie uzyskiwano w poprzednich t

okresach. Gdyby portfel x był stabilny to oczekiwane zyski byłyby stałe w czasie i były równe $\mathbb{I}_t m^T x$. Miara niestabilności portfela może być kwadrat odległości między tymi wektorami, czyli $\|A^T x - \mathbb{I}_t m^T x\|^2$. Po prostych przekształceniach wyrażenie to jest równe $x^T C x$, gdzie $C = \frac{1}{T} (A - m \mathbb{I}_t^T) (A^T - \mathbb{I}_t m^T)$ jest macierzą kowariancji dla danych w macierzy A . Funkcję celu, którą będziemy minimalizować, jest więc wyrażenie $f(x) = x^T C x$.

Ograniczenia typu nierówności: $m^T x \geq p$, (warunek na minimalny zysk)
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_r \geq 0$ (ograniczenia zakresu)
Ograniczenia typu równości: $x_1 + x_2 + \dots + x_r = 1$ (warunek zupełności portfela)

W naszym konkretnym przykładzie liczbowym mamy:

$$m = (5 \ 6 \ 5 \ 4)^T, \quad C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 98 & 22 & 3 & 109 \\ 22 & 8 & -2 & 26 \\ 3 & -2 & 2 & -13 \\ 109 & 26 & -13 & 122 \end{pmatrix}$$

Zadanie optymalizacyjne będzie postaci

$$\begin{aligned} f(x) = 3 x^T C x = & 98 x_1^2 + 44 x_1 x_2 + 6 x_1 x_3 + 218 x_1 x_4 + \\ & + 8 x_2^2 - 4 x_2 x_3 + 52 x_2 x_4 + \\ & + 2 x_3^2 - 26 x_3 x_4 + \\ & + 122 x_4^2 = \min! \end{aligned}$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} 5 x_1 + 6 x_2 + 5 x_3 + 4 x_4 & \geq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 & \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \end{aligned}$$

■ Standardowa postać zadania optymalizacyjnego

Aby uniknąć wieloznaczności warunków w różnych zadaniach optymalizacyjnych, stosuje się standardowy zapis zadania optymalizacyjnego

- **min $f(x)$**
- $g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m$ (ograniczenia LE)**
- $h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, p$ (ograniczenia EQ)**
- $x_{kL} \leq x_k \leq x_{kU}, k = 1, 2, \dots, n$ (zakres)**

Uwaga 1: Czasami łączy się nierówności zakresu i ograniczeń LE.

Uwaga 2: Powinno być $p < n$.

Jeśli $p > n$ to więcej ograniczeń, niż zmiennych,

jeśli $p = n$ to mamy do czynienia z układem równań n równań z n niewiadomymi i nie jest to istotne zadanie optymalizacyjne

Uwaga 3: Zagadnienie na maksimum $f(x)$ daje się sformułować jako zagadnienie minimum funkcji $-f(x)$:

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ iff } -f(x_0) \leq -f(x),$$

Podobnie, nierówności $\geq$ można zamienić na $\leq$, mnożąc obie strony przez -1 .

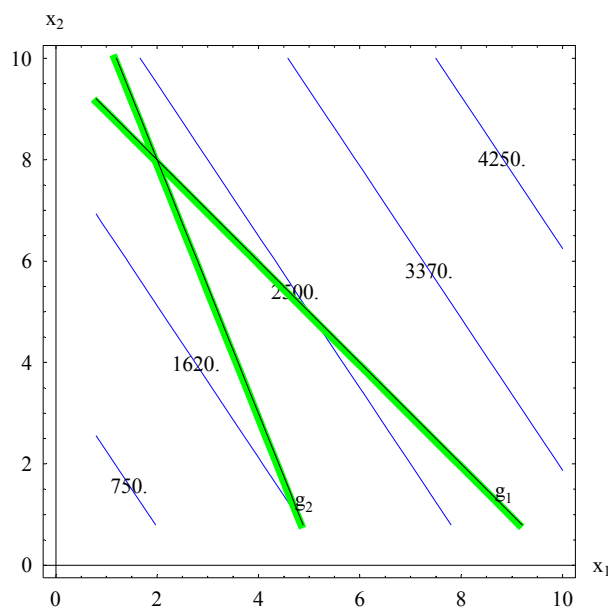
Po prawej stronie nierówności/równości można wprowadzić 0 , przenosząc wszystko na lewą stronę.

■ Graficzne rozwiązanie zadania optymalizacyjnego.

Zadanie, zawierające dwie zmienne można w przybliżeniu rozwiązać graficznie. Rysujemy obszary dopuszczalne oraz poziomice funkcji celu. Staramy się zgadnąć położenie minimum na podstawie obserwacji izolinii.

■ Przykład 1.1 (c.d.)

Funkcje g_1 i g_2 są liniowymi ograniczeniami typu nierówność. Obszar dopuszczalny jest przekrojem dwóch hiperpłaszczyzn. Na rysunku strona *niezacieniona* jest hiperpłaszczyzną dopuszczalną. Funkcja celu jest liniowa, więc poziomice są równoległymi prostymi.



Jak widać z rysunku, poziomica, odpowiadająca minimum funkcji celu zawarta jest między prostymi $300x_1 + 200x_2 = 1620$ i $300x_1 + 200x_2 = 2500$. Poziomica ta musi przechodzić przez wierzchołek kąta, utworzonego przez proste $g_1 = 15x_1 + 15x_2 = 150$ i $g_2 = 25x_1 + 10x_2 = 130$. Ten punkt przecięcia ma współrzędne (całkowite!) $x_1 = 2$ i $x_2 = 8$, co daje rozwiązanie naszego zadania. Wartość minimalna funkcji celu wynosi 2200. ■

2. Optymalizacja bez ograniczeń

O optymalizacji bez ograniczeń mówimy, gdy zbiór ograniczeń (typu LE i EQ) jest pusty. Zadanie optymalizacyjne przybierze prostą postać: $f(x) = \min!$ Przypomnimy warunki konieczne i dostateczne istnienia minimum gładkiej funkcji bez ograniczeń.

■ 2.1 Rozkład Taylora

■ 2.1.1 Rozkład Taylora funkcji jednej zmiennej

Twierdzenie. Dla funkcji jednej zmiennej, mającej w otoczeniu punktu $\bar{x}$ pochodną rzędu $k + 1$ zachodzi, dla x z otoczenia $\bar{x}$, tożsamość:

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\bar{x})(x - \bar{x})^2 + \dots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(\bar{x})(x - \bar{x})^k + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0)(x - \bar{x})^{k+1}$$

Punkt x_0 leży między x a $\bar{x}$.

■ Przykład 2.1

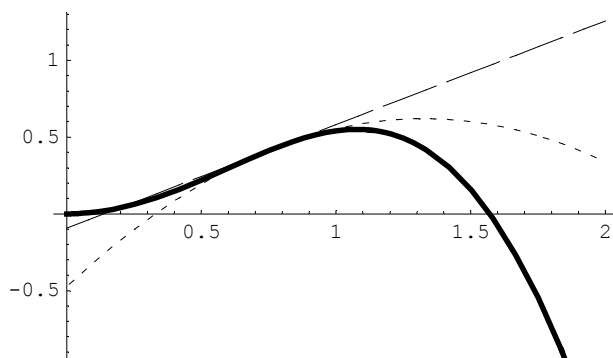
Rozkład Taylora jest dobry jedynie w otoczeniu punktu wokół którego rozwijamy szereg. Rozwińmy funkcję $f(x) = x^2 \cos(x)$ w otoczeniu punktu $\frac{\pi}{4}$ z dokładnością do wyrazów 1 i 2 stopnia. Pochodne pierwszego i drugiego stopnia wynoszą:

$$f' [x] = 2 x \cos [x] - x^2 \sin [x], \quad f'' [x] = 2 \cos [x] - x^2 \cos [x] - 4 x \sin [x]$$

Rozwinięcie Taylora pierwszego i drugiego stopnia w otoczeniu punktu $\frac{\pi}{4}$ ma postać:

$$t_1 [x] = 0.436179 + 0.674542 (-0.785398 + x)$$

$$t_2 [x] = 0.436179 + 0.674542 (-0.785398 + x) - 0.621703 (-0.785398 + x)^2$$



■