

METODA EMERSONA I STOTO (1982)

Rozkład funkcji $f(x) = x^p$ w szereg Taylora wokół x_0 :

$$x^p \approx x_0^p + px_0^{p-1}(x - x_0) + \frac{p(p-1)}{2}x_0^{p-2}(x - x_0)^2$$

Podstawiając $x_0 = \tilde{x}$ i dwukrotnie $x = x_{(k)}$ oraz $x = x_{(n+1-k)}$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} x_{(k)}^p &\approx \tilde{x}^p + p\tilde{x}^{p-1}(x_{(k)} - \tilde{x}) + \frac{p(p-1)}{2}\tilde{x}^{p-2}(x_{(k)} - \tilde{x})^2, \\ x_{(n+1-k)}^p &\approx \tilde{x}^p + p\tilde{x}^{p-1}(x_{(n+1-k)} - \tilde{x}) + \frac{p(p-1)}{2}\tilde{x}^{p-2}(x_{(n+1-k)} - \tilde{x})^2 \end{aligned} \quad (*)$$

Gdy p jest potęgą przekształcenia symetryzującego, to

$$x_{(n+1-k)}^p + x_{(k)}^p = 2\tilde{x}^p$$

Po dodaniu stronami (*) uzyskamy

$$0 \approx p\tilde{x}^{p-1}(x_{(k)} + x_{(n+1-k)} - 2\tilde{x}) + \frac{p(p-1)}{2}\tilde{x}^{p-2}((x_{(k)} - \tilde{x})^2 + (x_{(n+1-k)} - \tilde{x})^2),$$

Dzieląc przez $2p\tilde{x}^{p-1}$ obie strony, otrzymamy, że

$1 - p$ jest współczynnikiem kierunkowym prostej:

$$\frac{x_{(k)} + x_{(n+1-k)}}{2} - \tilde{x} \approx (1 - p) \frac{(x_{(k)} - \tilde{x})^2 + (x_{(n+1-k)} - \tilde{x})^2}{4\tilde{x}}$$