

STATYSTYKA
DLA STUDENTÓW III ROKU
MATEMATYKI EKONOMICZNEJ, MATEMATYKI Z INFORMATYKĄ I
MATEMATYKI NAUCZYCIELSKIEJ

Lista 3

1. Ciało o masie jednostkowej umieszczono w polu sił o nieznanym stałym naprężeniu θ . W chwilach $t_1, t_2, \dots, t_n$ zmierzono położenia ciała $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ w tym polu. Wartość Y_i różni się od prawdziwej wartości $(\theta/2)t_i^2$ o błąd losowy ε_i mający rozkład o średniej 0 i stałej a nieznannej wariancji. Zakładając, że błędy losowe są niezależne, oblicz metodą najmniejszych kwadratów estymator parametru θ .

2. Niech

$$Y_i = \begin{cases} \theta_1 + \varepsilon_i & \text{dla } i = 1, 2, \dots, n_1 \\ \theta_2 + \varepsilon_i & \text{dla } i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_1 + n_2 \end{cases}$$

oraz ε_i są niezależne o średniej 0 i stałej a nieznannej wariancji. Znajdź estymatory najmniejszych kwadratów dla θ_1 i θ_2 .

3. W chwilach $t_1, t_2, \dots, t_n$ zmierzono wartości pewnej cechy $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$. Załóżmy, że związek między wartościami Y a zmienną t jest opisany przez model regresji liniowej. Znajdź, metodą najmniejszych kwadratów, estymator wartości Y w chwili t_{n+1} i pokaż, że minimalizuje on średni błąd kwadratowy.
4. Dla estymatorów $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3$ parametru θ w rozkładzie Hardy'ego - Weinberga z zad.1, lista 2 oblicz w przypadku $n = 2$:

- (a) obciążenia
- (b) wariancje
- (c) średnie błędy kwadratowe

i porównaj, który z nich jest najlepszy

5. Niech $X^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ będą próbą prostą z rozkładu o średniej μ i odchyleniu standardowym σ i oba parametry są nieznane. Rozważmy rodzinę estymatorów $\hat{\theta}(X) = \sum_{i=1}^n c_i x_i : c_i \in \mathcal{R}$. Udowodnij, że:

- (a) $\hat{\theta}$ jest estymatorem nieobciążonym $\mu \iff \sum_{i=1}^n c_i = 1$,
- (b) spośród estymatorów z punktu (a) średnia arytmetyczna ma najmniejszą wariancję (a więc i najmniejszy średni błąd kwadratowy)

6. Niech $X = [x_1]$ będzie próbą jednoelementową o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(\mu, 1)$. Rozważmy estymatory wartości średniej μ postaci $\hat{\mu}(X) = ax_1 + b$.

- (a) Oblicz średni błąd kwadratowy takiego estymatora

- (b) Czy istnieje taki układ parametrów (a_0, b_0) , że estymator $\hat{\mu}(X) = a_0x_1 + b_0$ ma jednostajnie, względem μ , najmniejszy średni błąd kwadratowy spośród wszystkich estymatorów opisanych w tym zadaniu?
- (c) Znajdź wszystkie nieobciążone estymatory postaci $\hat{\mu}(X) = ax_1 + b$.
7. W praktyce statystycznej respondent często musi odpowiadać na trudne pytania, na przykład: *Czy próbowałeś kiedykolwiek narkotyków?* Badaczka interesuje, jakie jest prawdopodobieństwo θ odpowiedzi TAK w populacji. Aby zachować dyskrecję, stosuje się następujące metody:
- (a) **metoda neutralnego pytania:**
Zadaje się respondentowi dwa pytania: Q_1 (trudne pytanie, np. *Czy próbowałeś kiedykolwiek narkotyków?*) i pytanie Q_2 (o znanym prawdopodobieństwie odpowiedzi TAK np. *Rzuć kością. Czy otrzymałeś szóstkę?*). Następnie każe się respondentowi w tajemnicy rzucić dwukrotnie kością. Jeśli za pierwszym razem wypadnie 1 lub 2 to odpowiada on na pytanie Q_1 , w przeciwnym razie odpowiada na pytanie Q_2 dostosowując odpowiedź do drugiego rzutu kością.
- (b) **metoda Warnera:**
Respondent odpowiada na pytanie trudne Q_1 lub na jego negację $\overline{Q_1}^1$ w zależności od wyniku np. rzutu kością (Jeśli wypadnie 1 lub 2 to odpowiada on na pytanie Q_1 , w przeciwnym razie odpowiada na pytanie $\overline{Q_1}$).

Znajdź metodą porównania częstości estymatory θ dla obu metod, opisanych w (a) i (b), gdy dysponujesz odpowiedziami od n respondentów. Zbadaj nieobciążoność tych estymatorów i porównaj ich średnie błędy kwadratowe.

Andrzej Dąbrowski, 9.11.99

¹ np. Q_1 : *Czy próbowałeś kiedykolwiek narkotyków?* i $\overline{Q_1}$: *Czy nigdy nie próbowałeś narkotyków?*