

STATYSTYKA
DLA STUDENTÓW III ROKU
MATEMATYKI EKONOMICZNEJ, MATEMATYKI Z INFORMATYKĄ I
MATEMATYKI NAUCZYCIELSKIEJ

Lista 4

1. $X^T = (x_1, x_2)$ jest próbą prostą z rozkładu jednostajnego na odcinku $[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}]$. Porównaj poziomy ufności i długości dwóch przedziałów ufności dla parametru θ :
 - (a) $[x_{(1)}, x_{(2)}]$,
 - (b) $[\max\{x_{(1)}, x_{(2)} - \frac{1}{2}\}, \min\{x_{(2)}, x_{(1)} + \frac{1}{2}\}]$
 - (c) Zbuduj przedziały ufności typu (a) i (b) dla danych $X^T = (1.5, 2.1)$ i $X^T = (1.5, 1.8)$
2. $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ jest wektorem realizacji niezależnych zmiennych losowych postaci¹ $X_i = (\theta/2)t_i^2 + \varepsilon_i$, gdzie ε_i mają rozkład normalny o średniej 0 i znanym odchyleniu standardowym σ . Wyznacz estymator największej wiarygodności dla θ i na jego podstawie znajdź przedział ufności dla θ na poziomie ufności $(1 - \alpha)$, wybierając tak momenty t_i , aby przedział ten dla ustalonego α miał zadaną z góry długość.
3. Niech wynikiem obserwacji będzie liczba sukcesów s w schemacie Bernoulliego n doświadczeń z nieznanym prawdopodobieństwem sukcesu θ . Korzystając z twierdzenia Moivre'a-Laplace'a, które mówi, że według prawdopodobieństwa

$$\frac{\frac{s}{n} - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z$$

gdzie Z jest standardowym rozkładem normalnym, znajdź przybliżony (dla dużych n) przedział ufności dla θ na poziomie ufności $1 - \alpha$ nie korzystając z grubego oszacowania $\theta(1 - \alpha) \leq 1/4$. Oblicz przedział ufności dla θ gdy $s = 10, n = 100, 1 - \alpha = 0.95$.

4. Niech $X^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu ciągłego o nieznanym medianie² M . Pokaż, że dla każdego $i = 1, 2, \dots, n - 1$

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{(i)} < M < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{(i)}\right) = \frac{1}{2}$$

- (a) Znajdź, korzystając z udowodnionej równości, najkrótszy przedział ufności dla M na poziomie ufności $1 - \alpha$,
- (b) Oblicz najkrótszy przedział ufności dla mediany na poziomie 0.95 dla danych $X^T = (171, 175, 173, 173, 168, 195, 171, 175, 169, 188)$

¹patrz zad. 1 lista 3

²medianą rozkładu ciągłej zmiennej losowej X jest liczba M , że $P(X \leq M) = P(X \geq M) = \frac{1}{2}$

5. Ile należy wykonać pomiarów, aby oszacować z dokładnością do 0.1 i na poziomie ufności 0.95 średnią w rozkładzie normalnym z odchyleniem standardowym $\sigma = 2$?
6. Oblicz, ile należy wykonać pomiarów, aby oszacować z dokładnością d i na poziomie ufności $1 - \alpha$ średnią w rozkładzie normalnym z nieznanym odchyleniem standardowym σ , jeżeli znasz oszacowanie z góry parametru σ : $\sigma \leq \sigma_0$ i σ_0 jest znane.

Andrzej Dąbrowski