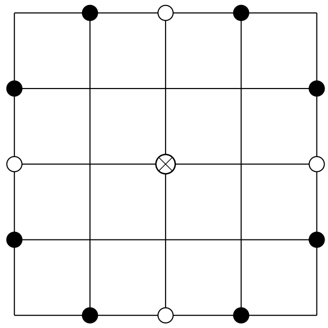
Teoria Prawdopodobieństwa 2

Lista zadań nr 1

1. Policja w Nowym Yorku próbuje złapać przestępcę znajdującego się w punkcie $\otimes$. Obstawiła część ulic, ale nie wszystkie. Przestępca w każdym kroku porusza się losowo (tzn. z prawdopobobieństwem $1/4$ w każdym z możliwych kierunków). Jeżeli wpadnie na policję $\bullet$ zostaje złapany, jeżeli dotrze do jednego z pól $\circ$ ucieka. Oblicz prawdopobobieństwo, że uda mu się uciec.



2. Alicja i Bob rzucają symetryczną monetą tak długo, aż wypadnie OOR lub ORR. Alicja wygrywa, gdy wzorzec OOR wypadnie jako pierwszy, natomiast Bob, gdy wypadnie ORR. Jaka jest oczekiwana długośc gry? Jaka jest oczekiwana długość gry jeżeli założymy, że wygra Alicja?

3. Alicja i Bob rzucają symetryczną monetą tak długo, aż wypadnie $OOOR$ lub $ORRR$. Alicja wygrywa, gdy wzorzec $OOOR$ wypadnie jako pierwszy, natomiast Bob, gdy wypadnie $ORRR$. Oblicz prawdopobobieństwo, że grę wygra Alicja.

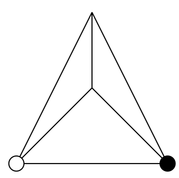
4. Rzucamy wielokrotnie monetą. Oznaczmy przez T pierwszy moment, w którym wypadną trzy orły pod rząd. Oblicz $\mathbb{E}T$.

5. (Ruina gracza) Gracz startuje z kapitałem k. W każdej rundzie rzuca monetą, jeżeli wypadnie orzeł wygrywa 1, w przeciwnym razie traci 1. Gracz kończy grę, gdy jego kapitał osiągnie poziom n lub zbankrutuje. Przedstaw odpowiedni spacer losowy na grafie.

- Czy jest on nieredukowalny? Czy posiada miarę stacjonarną?
- Oblicz prawdopobobieństwo zakończenia gry przez gracza z kapitałem n, tzn. $\mathbb{P}_k[X_\tau = n]$, gdzie τ oznacza moment zakończenia gry.
- Oblicz wartość oczekiwaną długości gry, tzn. $\mathbb{E}_k\tau$. Wskazówka: ułóż odpowiednie równanie rekurencyjne, a następnie je rozwiąż.

6. W wierzchołku A pięciokąta $ABCDE$ znajduje się jabłko, a dwa wierzchołki dalej, w C znajduje się robaczek. Każdego dnia robaczek pełza z prawdopodobieństwem $1/2$ do jednego z sąsiadnich wierzchołków. Po osiągnięciu wierzchołka A robaczek zatrzymuje się na obiad. Jaka jest wartość oczekiwana liczby dni, po których robaczek dotrze na obiad?

7. Alicja i Bill wędrują losowo po grafie. Początkowo Alicja jest w wierzchołku $\circ$, a Bob w $\bullet$. W każdym kroku przechodzą do jednego z sąsiednich wierzchołków z prawdopodobieństwem $1/3$. Niech T oznacza moment, którym się spotkają. Oblicz $\mathbb{E}T$.



8. Pewien Pan ma problem ze znalezieniem pracy. Jeżeli jakiegoś poranka nie jest zatrudniony, to ze stałym prawdopodobieństwem p będzie zatrudniony przed wieczorem. Ale jeśli zaczyna on dzień będąc już zatrudnionym, to z prawdopobobieństwem q jeszcze przez zmrokiem zostanie zwolniony. Załóżmy, że pierwszego dnia rano był on zatrudniony. Niech X_n oznacza liczbę dni, okresie pierwszych n dni, kiedy był on zatrudniony. Co możesz powiedzieć o $\mathbb{E}X_n$? Czy umiesz policzyć granicę $\mathbb{E}X_n/n$?

9. (Funkcja łańcucha Markowa nie musi być łańcuchem Markowa.) Niech $\{X_t\}$ będzie łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów $\Omega = \{s_1, s_2, s_3\}$, z macierzą przejścia

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i rozkładem początkowym $\mu_0 = (1/3, 1/3, 1/3)$. Dla każdego n, zdefiniujmy

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } X_n = s_1 \\ 1 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

Pokaż, że Y_n nie jest łańcuchem Markowa.

10. Pokaż, że jeżeli łańcuch Markowa jest nieredukowalny, to wszystkie punkty mają ten sam okres.

11*. Jeżeli łańcuch Markowa jest nieredukowalny i aperiodyczny, to istnieje M takie, że $P^t(x, y) > 0$ dla wszystkich $x, y \in \Omega$ oraz $t \geq M$.

12. Pokaż, że nieredukowalny łańcuch Markowa posiada co najwyżej jedną miarę stacjonarną. **Wskazówka:** Niech P będzie macierzą przejścia, wówczas jedynymi funkcjami harmonicznymi (tzn. spełniającymi $Ph = h$) są funkcje stałe ...

13. Uzasadnij, że jeżeli łańcuch Markowa ma dwie miary stacjonarne, to ma ich nieskończenie wiele.

14. (Dowód istnienia miary stacjonarnej) Niech P będzie macierzą przejścia łańcucha Markowa na skończonej przestrzeni stanów Ω. Dla dowolnego rozkładu początkowego μ na Ω i $n > 0$ definiujemy

$$\nu_n = \frac{1}{n}(\mu + \mu P + \cdots + \mu P^{n-1}).$$

- Pokaż, że dla każdego $x \in \Omega$ i $n > 0$,

$$|\nu_n P(x) - \nu_n(x)| \leq \frac{2}{n}.$$

- Pokaż, że istnieje podciąg $\{\nu_{n_k}\}$ taki, że $\lim_{k\to\infty} \nu_{n_k}(x)$ istnieje dla każdego $x \in \Omega$.
- Dla $x \in \Omega$ zdefiniujmy $\nu(x) = \lim_{k\to\infty} \nu_{n_k}(x)$. Wykaż, że ν jest miarą stacjonarną P.

15. Skoczek znajduje się w rogu szachownicy. Zaczyna się poruszać w sposób losowy wybierając za każdym razem w sposób jednostajny jeden z dozwolonych ruchów. Jaka jest wartość oczekiwana liczby ruchów po których skoczek wróci do punktu startowego?

16. Rozważmy spacer losowy na $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$, w którym cząsteczka porusza się w lewo lub w prawo z prawdopobobieństwem $1/2$, za wyjątkiem punktów 0 i n. W punkcie n spacer pozostaje lub przechodzi do $n-1$ z prawdopobobieństwem $1/2$. Stan 0 jest stanem absorbującym, a więc po trafieniu w niego cząsteczka pozostanie w nim na zawsze. Oblicz wartość oczekiwaną czasu trafienia w 0 cząsteczki, która startuje w punkcie n.

17. Rozważmy prosty spacer losowy na $\mathbb{Z}_n$. Oznaczmy przez τ pierwszy moment w którym zostały odwiedzone wszystkie stany. Oblicz $\mathbb{E}\tau$. **Wskazówka:** skorzystaj z zadania o ruinie gracza.

18. W dwóch urnach znajduje się w sumie k kul (k-ustalona liczba). Definiujemy w następujący sposób łańcuch Markowa. W każdym kroku losujemy jednostajnie jedną z kul i przekładamy ją do sąsiedniej urny. Niech X_t oznacza liczbę kul znajdujących się w czasie t w pierwszej urnie. Wówczas X_t jest łańcuchem Markowa. Znajdź jego miarę stacjonarną. Pokaż, że proces jest odwracalny.

19. Niech $\{X_n\}$ będzie nieredukowalnym i aperiodycznym łańcuchem Markowa z miarą stacjonarną π. Oznaczmy przez $N(x, n)$ liczbę wizyt w punkcie x w pierwszych n krokach. Pokaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}[N(x, n)] = \pi(x).$$

20*. Niech Y oznacza ostatni stan oznaczony przez prosty spacer losowy na $\mathbb{Z}_n$ startujący z 0. Pokaż, że Y ma rozkład jednostajny na zbiorze $\{1, \ldots, n-1\}$.