(Lokalne twierdzenie graniczne) Załóżmy, że $\{X_n\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wartościach całkowitych i o takim samym rozkładzie. Oznaczmy przez ϕ funkcję charakterystyczną X_j i niech $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Założmy ponadto, że rozkład X_j jest symetryczny względem 0, $\mathrm{Var}(X_j) = \sigma^2$, $\mathbb{E}|X_j|^3 < \infty$, $\mathbb{P}[X_j = 0] > 0$, $\mathbb{P}[X_j = 1] > 0$. Pokaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi\sigma^2 n} \cdot \mathbb{P}[S_n = 0] = 1.$$

Wskazówka:

$$\mathbb{P}[S_n = 0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi^n(t)dt = \frac{1}{2\pi\sqrt{n}}\int_{-\pi\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}} \phi(t/\sqrt{n})^n dt.$$

Rozwiązanie: Z symetryczności zmiennej losowej X:

$$\phi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[\cos(tX)] + i\mathbb{E}[\sin(tX)] = \mathbb{E}[\cos(tX)].$$

oraz

$$\phi^n(t) = \mathbb{E}[e^{itS_n}] = \mathbb{E}[\cos(tS_n)].$$

Dowodzimy formuły sformułowanej we wskazówce (poniżej używamy tw. Fubiniego):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi^n(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{E}[\cos(tS_n)]dt \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{S_n=0\}} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt\right] + \sum_{k\neq 0} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{S_n=k\}} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(tk)dt\right] \\
&= \mathbb{P}\big[S_n = 0\big].
\end{aligned}$$

Zamieniając zmienne:

$$2\pi\sqrt{n}\mathbb{P}\big[S_n = 0\big] = \int_{|t|<\pi\sqrt{n}} \phi^n(t/\sqrt{n})dt$$

Ustalmy $\delta > 0$. Powyższą całkę robijamy na dwie i obie szacujemy osobno:

$$\int_{|t|<\pi\sqrt{n}} \phi^n(t/\sqrt{n})dt = \int_{|t|<\delta\sqrt{n}} \phi^n(t/\sqrt{n})dt + \int_{\delta\sqrt{n}\le|t|<\pi\sqrt{n}} \phi^n(t/\sqrt{n})dt.$$

Zaczynamy od drugiej całki. Oznaczmy $p_k = \mathbb{P}[X = k]$. Zauważmy, że dla s takich, że $\delta < |s| < \pi$:

$$|\phi(s)| = \mathbb{E}[\cos(sX)] = \left| p_0 + p_1\cos s + \sum_{k\neq 0,1} p_k\cos(kt)\right| < \gamma < 1.$$

Powyżej korzystamy z założeń $p_0, p_1 > 0$. Stąd szacujemy drugą całkę:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{\delta\sqrt{n}\le|t|<\pi\sqrt{n}} \phi^n(t/\sqrt{n})dt\right| \le \lim_{n\to\infty}\int_{\delta\sqrt{n}\le|t|<\pi\sqrt{n}} \gamma^n dt \le \lim_{n\to\infty} 2\pi\sqrt{n}\gamma^n = 0.$$

Wystarczy więc pokazać (poniżej dla uproszczenia zakładamy $\sigma^2 = 1$)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|t|<\delta\sqrt{n}} \phi^n(t/\sqrt{n})dt = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(t)dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}dt, \tag{1}$$

gdzie

$$f_n(t) = \mathbf{1}_{\{|t|<\delta\sqrt{n}\}}\phi^n(t/\sqrt{n})$$

Zauważmy najpierw, że funkcja $f_n(t)$ zbiega punktowo (tzn. dla każdego t) do $e^{-t^2/2}$. Mianowicie ustalmy t i weźmy duże n tak, aby $|t| < \delta\sqrt{n}$. Wtedy postępujemy dokładnie tak samo jak w dowodzie CTG:

$$f_n(t) = \phi^n(t/\sqrt{n}) = \big(1 - (1-\phi(t/\sqrt{n})\big)^{\frac{1}{1-\phi(t/\sqrt{n})}\cdot n(1-\phi(t/\sqrt{n}))} \to e^{-\lim_{t\to\infty} n(1-\phi^n(t/\sqrt{n}))}$$

i następnie korzystając z rozwinięcia Taylora:

$$\lim_{t\to\infty} n(1-\phi(t/\sqrt{n})) = \lim_{t\to\infty} n\cdot\big(t^2/(2n) + o(t^2/(2n))\big) = t^2/2.$$

Pokazaliśmy więc, że w (1) funkcje pod całką są zbieżne. Pozostaje do pokazania, że możemy przejść z granicą pod całkę. W tym celu znajdziemy całkowalną majorantę funkcji f_n, wtedy twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zdominowanej pozwala wywnioskować (1). Zacznijmy od rozpisania funkcji ϕ w szereg Taylora:

$$\phi(s) = 1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3\phi'''(0)}{6} + o(s^3) = 1 - \frac{s^2}{2} + o(s^3),$$

bo $\phi'''(0) = 0$ (akurat ta obserwacja nie jest poniżej potrzebna i możnaby pisać dalej ten składnik). Składnik $o(s^3)$ oznacza wyrażenie, które podzielone przez s^3 zbiega do zera, gdy $s \to 0$. W szczególności dla każdego $\eta > 0$ istnieje δ takie, że $o(s^3) \leq \eta|s|^3$, gdy $|s| \leq \delta$. Przypomnijmy również rozwinięcie funkcji logarytm:

$$\log(1+s) = s + O(s^2).$$

Dalej piszemy:

$$\phi(t/\sqrt{n})^n = e^{n\log\phi(t/\sqrt{n})} = e^{n\log(1-\frac{t^2}{2n}+o(t^3/n^{3/2}))} = e^{n\cdot(-\frac{t^2}{2n}+o(t^3/n^{3/2}))} = e^{-\frac{t^2}{2}+no(t^3/n^{3/2}))}$$

Zauważmy, że jeżeli wybraliśmy odpowiednio małe δ, to na zbiorze $\{|t| < \delta\sqrt{n}\}$ zachodzi:

$$-\frac{t^2}{2} + no(t^3/n^{3/2})) \leq -\frac{t^2}{4}$$

Co z kolei dowodzi:

$$f_n(t) \leq e^{-t^2/4}.$$