Teoria Prawdopodobieństwa 2

Lista zadań nr 3

1. Niech $\{X_n\}$ będzie prostym spacerem losowym na $\mathbb{Z}$, tzn. $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ dla niezależnych zmiennych losowych Y_n takich, że $\mathbb{P}[Y_n = 1] = \mathbb{P}[Y_n = -1] = 1/2$.

- Czy istnieje a takie, że ciąg $\{a^n \cos X_n\}$ jest martyngałem?
- Udowodnij, że dla dowolnego $\lambda > 0$, ciąg $e^{\lambda X_n - \lambda^2 n/2}$ jest nadmartyngałem.

2. Załóżmy, że $\{X_n\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie i średniej 0. Udowodnij, że ciąg

$$Z_n = X_0 X_1 + X_1 X_2 + \cdots + X_{n-1} X_n, \quad Z_0 = 0,$$

jest martyngałem.

3. Niech $\{Y_n\}_{n \in N}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o średniej 0 i wariancji σ^2. Pokaż, że ciąg

$$X_n = \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i \right)^2 - n\sigma^2$$

jest martyngałem.

4. Załóżmy, że $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ są martyngałami względem tej samej filtracji $\{\mathcal{F}_n\}$. Czy stąd wynika, że natępujące procesy są martyngałami: a) $Z_n = X_n + Y_n$, b) $W_n = \max\{X_n, Y_n\}$?

5. Niech $\{X_n\}$ będzie łańcuchem Markowa (na skończonej lub przeliczalnej przestrzeni stanów Ω) z macierzą przejścia P i niech f będzie funkcją harmoniczną (podharmoniczną / nadharmoniczną), tzn funkcją na Ω spełniającą $f = Pf$ ($f \le Pf$ / $f \ge Pf$). Uzasadnij, że $M_n = f(X_n)$ jest martyngałem (podmartyngałem / nadmartyngałem).

6. Funkcja $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ jest superharmoniczna jeżeli

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2} \le 0.$$

Pokazuje się wówczas, że dla każdego $x \in \mathbb{R}^d$ oraz $r > 0$,

$$f(x) \ge \int_{\partial B(x,r)} f(y) d\pi(y),$$

gdzie π jest znormalizowaną miarą powierzchniową. Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $U(\partial B(0,1))$ (jednostajnym na sferze jednostkowej) i niech $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Pokaż, że $M_n = f(S_n)$ jest supermartyngałem.

7. Załóżmy, że $\{X_n\}$ jest martyngałem względem $\{\mathcal{F}_n\}$. Niech $\mathcal{F}'_n = \sigma\{X_1, \ldots, X_n\}$. Pokaż, że $\mathcal{F}_n \supset \mathcal{F}'_n$ oraz $\{X_n\}$ jest martyngałem względem $\{\mathcal{F}'_n\}$.

8. Uzasadnij, że jeżeli $\{X_n\}$ jest supermartyngałem takim, że $\mathbb{E}X_n$ jest stałe, to $\{X_n\}$ jest martyngałem.

9. Załóżmy, że X_n jest martyngałem oraz $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$ dla każdego n. Pokaż, że $Y_n = X_n^2$ jest podmartyngałem. Ponadto pokaż, że jeżeli $X_0 = 0$, to

$$\mathbb{E}[X_n^2] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[(X_j - X_{j-1})^2]$$

10. Pokaż, że jeżeli T_1 i T_2 są czasami zatrzymania, to $\min\{T_1, T_2\}$ i $\max\{T_1, T_2\}$ również są czasami zatrzymania. Czy $T_1^2, T_1 + 1, T_1 + T_2, T_1 - 1, \min\{T_1, 2T_2\}$ są czasami zatrzymania?

11. Pokaż, że jeżeli T_1, T_2 są czasami zatrzymania i $T_1 \leq T_2$, to $\mathcal{F}_{T_1} \subset \mathcal{F}_{T_2}$.

12. (Problem ruiny c.d.) Niech $\{X_n\}$ będzie prostym spacerem losowym na $\mathbb{Z}$ takim, że $X_0 = 0$ i niech $T = \min\{n : X_n = -j \text{ lub } X_n = k\}$ dla ustalonych $k, j > 0$.

- Pokaż, że $M_n = X_n^2 - n$ jest martyngałem.
- Wykorzystując twierdzenie Dooba uzasadnij $E[T] = jk$.

13. (Problem ruiny c.d.) Niech $\{X_n\}$ będzie niesymetrycznym spacerem losowym na $\mathbb{Z}$ (tzn. $\mathbb{P}[X_{n+1} = k+1|X_n = k] = p > 1/2$) takim, że $X_0 = 0$ i niech $T = \min\{n : X_n = -j \text{ lub } X_n = k\}$ dla ustalonych $k, j > 0$.

- Pokaż, że $M_n = X_n + n(1-2p)$ jest martyngałem.
- Wykorzystując twierdzenie Dooba oblicz $E[T]$.

14. Egzaminator przygotował m zestawów pytań. Studenci losują kolejno kartki z pytaniami, przy czym raz wyciągnięty zestaw nie wraca do ponownego losowania. Student nauczył się odpowiedzi na k zestawów ($k \leq m$). Obserwując przebieg egzaminu chce przystąpić do niego w takim momencie, aby zmaksymalizować szanse zdania. Czy istnieje strategia optymalna?

15. Mamy 10zł w monetach 1zł, a potrzebujemy pilnie 20zł. Jedynem sposobem zdobycia tych pieniędzy jest gra w 3 karty z szulerem (który wygrywa z prawdopodobieństwem 2/3). Szuler jest gotów grać z nami wiele razy o dowolne stawki, które jesteśmy w stanie założyć. Udowodnić, że niezależnie od wyboru strategii nasze szanse na uzyskanie brakujących 10zł nie przekraczają 1/3.

16. (Tożsamość Walda) Uzasadnij, że jeżeli $\{X_n\}$ są niezależnymi całkowalnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, a T jest czasem zatrzymania względem filtracji $\{\sigma(X_1, \ldots, X_n)\}$, takim, że $\mathbb{E}T < \infty$, to

$$\mathbb{E}[S_T] = \mathbb{E}T \cdot \mathbb{E}X_1,$$

gdzie $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. **Wskazówka:** ciąg $S_n - n\mathbb{E}X_1$ jest martyngałem, załóż na początek, że X_n są nieujemne, a T jest ograniczony.

17. Rzucamy kostką tak długo, aż otrzymamy wszystkie oczka. Znajdź średnią wartość sumy wyrzuconych oczek.

18. Niech S_n będzie prostym symetrycznym spacerem losowym na kracie $\mathbb{Z}^2$ (tzn. $S_0 = (0,0)$ i w każdym kroku cząsteczka przemieszcza się do jednego z sąsiadów z prawdopodobieństwem 1/4). Oznaczmy przez D_n odległość S_n od zera.

- Pokaż, że $D_n^2 - n$ jest matyngałem.
- Niech $T_r = \inf\{n : D_n > r\}$. Pokaż, że $r^{-2}\mathbb{E}T_r \to 1$, gdy $r \to \infty$.

19. Niech S_n będzie spacerem na $\mathbb{R}^2$, takim, że przyrosty $S_n - S_{n-1}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $U(\partial B(0,1))$ (jednostajnym na sferze jednostkowej). Rozwiąż podobne zadanie do powyższego.

20*. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie niezależnym ciągiem rzutów monetą i niech

$$\tau_{ORO} = \inf\{t : X_{t-2}X_{t_1}X_t = ORO\}.$$

Oblicz $\mathbb{E}\tau_{ORO}$. Oblicz wartości oczekiwane czasów zatrzymania dla innych wzorców, np OROR, ORRO. (Rozdział 17.3.2, Levin, Peres, Wilmer, *Markov chains and mixing times.*)