Teoria Prawdopodobieństwa 2

Lista zadań nr 4

1. Jedną z możliwych strategii gracza jest zmiana rodzaju gry. W przypadku gry sprawiedliwej nie powinno się ani zyskać, ani stracić. Przypuśćmy, że dwóch przyjaciół rozpoczęło inwestowanie na giełdzie w tym samym czasie i pewnego dnia okazało się, że ich portfele mają tę samą wartość. Co sądzić o propozycji 'zamieńmy się portfelami'? Rozważmy następujący model: dane są dwa martyngały $\{(X_n, \mathcal{F}_n)\}$, $\{(Y_n, \mathcal{F}_n)\}$ oraz czas zatrzymania T taki, że $X_T = Y_T$ na zbiorze $\{T < \infty\}$. Niech

$$Z_n = \begin{cases} X_n & \text{dla } n > T, \\ Y_n & \text{dla } n \leq T. \end{cases}$$

Pokaż, że $\{(Z_n, \mathcal{F}_n)\}$ jest martyngałem.

2. W pojemniku znajduje się pewna liczba cząstek, z których każda w chwili n z równym prawopodobieństwem albo dzieli się na dwie, albo ginie. W chwili 0 liczba cząstek wynosi 1. Pokaż, że z prawdopodobieństwem 1 po pewnym czasie wszystkie cząstki zginą, tzn. w pojemniku nie będzie ani jednej cząstki.

3. (Urny Polya) W urnie znajdują się dwie kule: czerwona i zielona. W każdym kroku losujemy jednostajnie jedną z kul, sprawdzamy jej kolor, zwracamy ją do urny, a następnie dokładamy do urny kolejną kulę tego samego koloru. Niech M_n oznacza stosunek liczby kul czerwonych do wszystkich kul w czasie n, $M_0 = 1/2$.

- Pokaż, że M_n jest martyngałem.
- Uzasadnij, że dla każdego n, rozkład M_n jest jednostajny na zbiorze $\{\frac{1}{n+2}, \frac{2}{n+2}, \ldots, \frac{n+1}{n+2}\}$.
- Niech $M = \lim_{n\to\infty} M_n$. Jaki jest rozkład M?

4*. Rozwiąż powyższe zadanie (punkt pierwszy i ostatni) przy założeniu, że w urnie jest początkowo C kul czerwonych i Z kul zielonych.

5. W urnie znajdują się trzy kule: czerwona, zielona i fioletowa. W każdym kroku losujemy jednostajnie jedną z kul, sprawdzamy jej kolor, zwracamy ją do urny, a następnie dokładamy do urny kolejną kulę tego samego koloru. Niech M_n^c / M_n^z / M_n^f oznacza stosunek liczby kul czerwonych / zielonych / fioletowych do wszystkich kul w czasie n.

- Pokaż, że istnieją granice $M^c = \lim_n M_n^c$, $M^z = \lim_n M_n^z$, $M^f = \lim_n M_n^f$.
- Znajdź rozkład łączny (M^c, M^z, M^f).

6. Pokaż, że jeżeli $\{Y_n\}$ jest ciągiem całkowalnych zmiennych losowych i zachodzi jeden z warunków

- istnieje całkowalna zmienna losowa Z taka, że $|Y_n| \leq |Z|$ dla każdego n;
- istnieją $p > 1$ i $C < \infty$ takie, że $\mathbb{E}[|Y_n|^p] < C$ dla każdego n,

to ciąg ten jest jednostajnie całkowalny.

7. Niech $\{X_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że dla każdego n, $\mathbb{P}[X_n = 2] = 1/3$, $\mathbb{P}[X_n = 1/2] = 2/3$. Niech $M_0 = 1$ i $M_n = X_1 X_2 \ldots X_n$.

- Pokaż, że M_n jest martyngałem.
- Pokaż, że istnieje $M = \lim_{n\to\infty} M_n$ oraz $M = 0$.
- Czy ciąg $\{M_n\}$ jest jednostajnie całkowalny?
- Pokaż, że dla każdego $p > 1$, $\sup_n \mathbb{E}[M_n^p] = \infty$.

8. (Losowy szereg harmoniczny) Niech $\{Y_n\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $\mathbb{P}[Y_n = 1] = \mathbb{P}[Y_n = -1] = 1/2$. Niech $M_0 = 0$ i $M_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{Y_j}{j}$. Uzasadnij, że ciąg M_n zbiega p.w.
Wskazówka: Pokaż, że M_n jest martyngałem takim, że $\sup_n \mathbb{E}M_n^2 < \infty$.

9. Niech $\{X_n\}$ będzie prostym spacerem losowym na $\mathbb{Z}$, tzn. $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ dla niezależnych zmiennych losowych Y_n takich, że $\mathbb{P}[Y_n = 1] = \mathbb{P}[Y_n = -1] = 1/2$. Zbadaj zbieżność p.w. oraz w L^p nadmartyngału $\{e^{X_n - n/2}\}$.

10. Definiujemy rekurencyjnie proces $\{X_n\}$: $X_0 = 1$, X_n jest jednostajnie rozłożony na przedziale $(0, X_{n-1})$. Pokaż, że $Y_n = 2^n X_n$ jest martyngałem oraz Y_n zbiega do 0 p.w.

11. (Ballot problem). W wyborach oddano n głosów na dwóch kandytatów. Wygrał kandydat A, który otrzymał a głosów. Kandytat B uzyskał $b < a$ głosów (oczywiście $a + b = n$). Głosy liczono w losowej kolejności. Oznaczmy przez X_k przewagę liczby głosów oddanych na kandydata A nad B po podliczeniu k głosów.

- Pokaż, że $M_k = \frac{X_{n-k}}{n-k}$ jest martyngałem.

- Niech $\mathbb{A}$ będzie zdarzeniem, że kandydat A prowadził przez cały okres podliczania głosów. Pokaż, że $\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \frac{a-b}{n}$. **Wskazówka:** rozważmy czas zatrzymania $T = \min\{k \leq n-1 : M_k = 0\}$ i $T = n-1$ jeżeli takie k nie istnieje...