Zadanie: W pojemniku znajduje się pewna liczba cząstek, z których każda w chwili n z równym prawopodobieństwem albo dzieli się na dwie, albo ginie. W chwili 0 liczba cząstek wynosi 1. Pokaż, że z prawdopodobieństwem 1 po pewnym czasie wszystkie cząstki zginą, tzn. w pojemniku nie będzie ani jednej cząstki.

Rozwiązanie: Oznaczmy przez M_n liczbę cząstek w czasie n, $M_0 = 0$. Wówczas

$$M_{n+1} = \sum_{i=1}^{M_n} Y_{i,n},$$

gdzie zmienne losowe $Y_{i,n}$ są niezależne i wszystkie mają ten sam rozkład: $\mathbb{P}[Y = 0] = \mathbb{P}[Y = 2] = 1/2$, są również niezależne od M_n

Krok 1. M_n jest martyngałem. Do zdefiniowania martyngału należy określić σ-ciało. W tym przypadku mamy naturalną definicję: $\mathcal{F}_n = \sigma\{M_0, M_1, ..., M_n\}$. Należy pokazać:

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n. \tag{1}$$

Przedstawimy dwa podobne do siebie rozumowania.

Dowód 1. Skorzystamy z definicji warunkowej wartości oczekiwanej. Zmienna losowa M_n jest $\mathcal{F}_n$ mierzalna. σ-ciało $\mathcal{F}_n$ jest generowane przez zbiory postaci $\{M_1 = k_1, ..., M_n = k_n\}$. Oznaczmy dowolny zbiór tej postaci przez A. Należy pokazać:

$$\int_A M_{n+1} d\mathbb{P} = \int_A M_n d\mathbb{P}.$$

W tym celu piszemy:

$$\int_A M_{n+1} d\mathbb{P} = \int_A \mathbf{1}_{\{M_n=k_n\}} M_{n+1} d\mathbb{P} = \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{M_n=k_n\}} \cdot \sum_{i=1}^{M_n} Y_{i,n}\Big] = \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{M_n=k_n\}} \sum_{j=1}^{k_n} Y_{i,j}\Big]$$
$$= \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{M_n=k_n\}}\big] \cdot \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E} Y_{i,j} = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{M_n=k_n\}} k_n\big] = \mathbb{E}\big[\mathbf{1}_A M_n\big] = \int_A M_n d\mathbb{P}$$

co dowodzi (1).

Dowód 2. Zauważmy, że $\{M_n\}$ jest łańcuchem Markowa. Wtedy

$$\mathbb{E}\big[M_{n+1}|\mathcal{F}_n\big] = \mathbb{E}\big[M_{n+1}|\sigma\{M_1, \dots, M_n\}\big] = \mathbb{E}\big[M_{n+1}|M_n\big].$$

Następnie zauważmy, korzystając z twierdzenia Fubiniego, że

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|M_n] = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{M_n} Y_{i,n} \Big| M_n\Big] = \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{M_n=k\}} \cdot \sum_{i=1}^{M_n} Y_{i,n} \Big| M_n\Big]$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\{M_n=k\}} \cdot \sum_{i=1}^{k} Y_{i,n} \Big| M_n\Big] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{M_n=k\}} \cdot \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\big[Y_{i,n}|M_n\big] = M_n \mathbb{E}\big[Y\big] = M_n.$$

Krok 2. M_n zbiega p.w. do pewnej zmiennej losowej M_∞ o wartościach w $\mathbb{N}_0$. M_n jest nieujemnym martyngałem, więc jest zbieżny p.w. do pewnej zmiennej losowej M_∞, a ponieważ M_n przyjmują wartości całkowite, to granica również.

Krok 3. $M_\infty = 0$ p.w.. Załóżmy, że $\mathbb{P}[M_\infty = k] > 0$ dla pewnego $k > 0$ i ustalmy tę wartość k. Oznaczmy $A = \{M_\infty = k\}$ oraz $B_j = \{M_j = k\}$. Zauważmy, że jeżeli ciąg M_n zbiega do $M_\infty = k$, to ciąg ten od pewnego miejsca musi być stały (przyjmuje jedynie wartości całkowite!). Oznaczmy

$$A_j = \{M_j = k, M_{j+1} = k, ...\} = \bigcap_{i=j}^{\infty} B_i$$

jest to zbiór na którym ciąg M_n jest stały od miejsca j. Wtedy $A = \bigcup_j A_j$. Mamy

$$\mathbb{P}[M_{j+1} = k | M_j = k] = q < 1,$$

bo np. $\mathbb{P}[M_{j+1} = 0 | M_j = k] = 2^{-k}$. Skorzystamy z formułki:

$$\mathbb{P}[A \cap B | C] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B \cap C]}{\mathbb{P}[B \cap C]} \cdot \frac{\mathbb{P}[B \cap C]}{\mathbb{P}[C]} = \mathbb{P}[A | B \cap C] \mathbb{P}[B | C].$$

Wówczas mamy:

$$\mathbb{P}[A_{j+1} | B_j] = \mathbb{P}[A_{j+2} \cap B_{j+1} | B_j] = \mathbb{P}[A_{j+2} | B_{j+1} \cap B_j] \mathbb{P}[B_{j+1} | B_j] = q \mathbb{P}[A_{j+2} | B_{j+1}]$$

Iterując to równanie

$$\mathbb{P}[A_j] = \mathbb{P}[A_{j+1} \cap B_j] = \mathbb{P}[A_{j+1} | B_j] \mathbb{P}[B_j] = ... = q^m \mathbb{P}[A_{j+m} | B_{j+m}] \mathbb{P}[B_j] \to 0 \quad m \to \infty$$

Zatem $\mathbb{P}[A_j] = 0$, a stąd $\mathbb{P}[A] = 0$, przecząc wyborowi k.

Zadanie: Definiujemy rekurencyjnie proces $\{X_n\}$: $X_0 = 1$, X_n jest jednostajnie rozłożony na przedziale $(0, X_{n-1})$. Pokaż, że $Y_n = 2^n X_n$ jest martyngałem oraz Y_n zbiega do 0 p.w.

Rozwiązanie. Dowód z użyciem martyngałów. Ciąg X_n można przedstawić w postaci

$$X_n = Z_1 Z_2 \dots Z_n,$$

gdzie Z_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $U(0,1)$ (możemy przyjąć $X_n = Z_n X_{n-1}$).

Sprawdzamy własność martyngału

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = 2^{n+1} \mathbb{E}[X_{n+1} | X_n] = 2^{n+1} \mathbb{E}[Z_{n+1} X_n | X_n] = 2^n X_n \cdot 2 \mathbb{E}[Z_{n+1} | X_n] = Y_n.$$

Powyżej skorzystaliśmy z faktu, że Z_{n+1} jest niezależne od X_n, więc $\mathbb{E}[Z_{n+1} | X_n] = \mathbb{E}[Z_{n+1}] = 1/2$.

Y_n jako nieujemny martyngał jest zbieżny do pewnej zmiennej losowej Y. Pokażemy, że $Y = 0$ p.w. Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $a > 0$

$$\mathbb{P}\big[Y \in (9/10a, 11/10a)\big] = 0.$$

Oznaczmy przez

$$A_N = \{Y_n \in (a/2, 2a) \text{ dla każdego } n > N\}$$

Wtedy A_N jest rosnącą rodziną zbiorów i

$$\{Y \in (9/10a, 11/10a)\} \subset \bigcup_{N \geq 1} A_N.$$

Wystarczy więc pokazać, że dla każdego N, $\mathbb{P}[A_N] = 0$. Ustalmy N. Zauważmy, że jeżeli

$$Y_n = 2^n X_n < 2a \quad \text{oraz} \quad a/2 < Y_{n+1} = 2^{n+1} X_{n+1} = 2 Z_{n+1} Y_n,$$

to

$$a/2 < 2 Z_{n+1} Y_n < 2 Z_{n+1} \cdot 2a, \quad \text{czyli} \quad Z_{n+1} > 1/8$$

Zatem

$$\mathbb{P}[A_N] \leq \mathbb{P}[Z_n > 1/8 \ \text{ dla każdego } n > N] = 0.$$

Zadanie: (Ballot problem): W wyborach oddano n głosów na dwóch kandytatów. Wygrał kandydat A, który otrzymał a głosów. Kandytat B uzyskał $b < a$ głosów (oczywiście $a + b = n$). Głosy liczono w losowej kolejności. Oznaczmy przez X_k przewagę liczby głosów oddanych na kandydata A nad B po podliczeniu k głosów.

- Pokaż, że $M_k = \frac{X_{n-k}}{n-k}$ jest martyngałem.

- Niech $\mathbb{A}$ będzie zdarzeniem, że kandydat A prowadził przez cały okres podliczania głosów. Pokaż, że $\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \frac{a-b}{n}$. **Wskazówka:** rozważmy czas zatrzymania $T = \min\{k \leq n-1 : M_k = 0\}$ i $T = n-1$ jeżeli takie k nie istnieje...

Rozwiązanie. W zadaniu chcemy policzyć prawdopodobieństwo, że licząc głosy oddane na kandydata A w losowej kolejności, w każdym kroku posiada on przewagę nad kandydatem B. Zakładamy, że głosy są liczony w sposób zupełnie losowy, a więc badamy ciągi takie jak poniższy

$$\text{AABAABBABA}\ldots\text{ABAAB},$$

przy załozeniu, że każda permutacja jest jednakowo prawdopodobna. Oznaczmy

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy na } i\text{-tym miejscu jest A} \\ -1 & \text{gdy na } i\text{-tym miejscu jest B} \end{cases}$$

Wówczas $\mathbb{P}[Y_i = A] = a/n$, $\mathbb{P}[Y_i = B] = b/n = 1 - a/n$, zmienne te maja więc takie same rozkłady. Są one jednak zależne od siebie. Zgodnie z definicją

$$X_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j.$$

Najpierw pokażemy, że M_k jest martyngałem. Mamy: $M_0 = X_n/n = (a-b)/n$, $M_1 = X_{n-1}/(n-1)$, ... Definiujemy zmienne, które opisują powyższy ciąg 'od końca':

- $\overleftarrow{Y}_i$ jest zdefiniowane jak powyżej, ale licząc od końca, tj
$$\overleftarrow{Y}_j = Y_{n+1-j}$$

- $\overleftarrow{X}_k$ jest przewagą liczby głosów oddanych na kandydata A nad B po podliczeniu k końcowych (!) głosów, tj.
$$\overleftarrow{X}_k = \sum_{i=1}^{k} \overleftarrow{Y}_i = \sum_{i=n+1-k}^{n} Y_i.$$

- $\overleftarrow{A}_k$ liczba głosów oddanych na A wśród k ostatnich głosów.

- $\overleftarrow{B}_k$ liczba głosów oddanych na B wśród k ostatnich głosów.

Wtedy

$$X_{n-k} + \overleftarrow{X}_k = a - b,$$

więc martyngał możemy zdefiniować nastepująco

$$M_k = \frac{X_{n-k}}{n-k} = \frac{a - b - \overleftarrow{X}_k}{n-k}.$$

Możemy też napisać filtrację względem której bedziemy badać własnosc martyngału: $\mathcal{F}_k = \sigma\{\overleftarrow{Y}_1, \ldots, \overleftarrow{Y}_k\}$, a więc jest to σ-ciało zależne od k ostatnich głosów. Poniżej będziemy chcieli obliczyć $\mathbb{E}[\overleftarrow{Y}_{k+1}|\mathcal{F}_k] = \mathbb{E}[\overleftarrow{Y}_{k+1}|\overleftarrow{X}_k]$. Możemy myśleć, że znając k ostatnie głosy chcemy zobaczyć co jest na miejscu $k+1$ od końca, np. jeżeli $k = 4$, to pytanie co jest na 5-tym miejscu od końca:

$$\text{AABAABBABA}\ldots\mathbf{A}\text{BAAB}.$$

Zauważmy, że znając wartości: k i $\overleftarrow{X}_k$ możemy wyznaczyć $\overleftarrow{A}_k$ i $\overleftarrow{B}_k$, bo spełniają one układ równań

$$\begin{cases} \overleftarrow{X}_k & = \overleftarrow{A}_k - \overleftarrow{B}_k \\ k & = \overleftarrow{A}_k + \overleftarrow{B}_k \end{cases}$$

Mamy więc

$$\mathbb{E}[\overleftarrow{Y}_{k+1}|\overleftarrow{X}_k] = 1 \cdot \frac{a - \overleftarrow{A}_k}{n-k} + (-1) \cdot \frac{b - \overleftarrow{B}_k}{n-k}$$

i stąd (korzystamy ponizej z równania $\overleftarrow{X}_{k+1} = \overleftarrow{X}_k + \overleftarrow{Y}_{k+1}$)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{k+1}|\mathcal{F}_k] &= \mathbb{E}\left[\frac{a-b-\overleftarrow{X}_{k+1}}{n-(k+1)}\Big|\overleftarrow{X}_k\right] \\
&= \frac{a-b}{n-k-1} - \frac{\overleftarrow{X}_k}{n-k-1} - \frac{a-\overleftarrow{A}_k}{n-k} \cdot \frac{1}{n-k-1} + \frac{b-\overleftarrow{B}_k}{n-k} \cdot \frac{1}{n-k-1} \\
&= \frac{1}{n-k-1}\left(a-b-\overleftarrow{X}_k - \frac{a-b}{n-k} + \frac{\overleftarrow{A}_k - \overleftarrow{B}_k}{n-k}\right) \\
&= \frac{1}{n-k-1}\left((a-b)\left(1-\frac{1}{n-k}\right) - \overleftarrow{X}_k\left(1-\frac{1}{n-k}\right)\right) \\
&= \frac{a-b-\overleftarrow{X}_k}{n-k} = M_k.
\end{aligned}$$

Dostajemy więc martyngał. Pozostaje druga część zadania. Zobaczmy, że $M_0 = (a-b)/n$. Czas zatrzymania T jest to pierwszy moment, gdy $M_k = 0$, a więc jest to moment (ostatni, lub też pierwszy licząc od prawej strony), gdy $X_{n-k} = 0$. A więc jest równowaga głosów na A i B. Mamy:

$$\frac{a-b}{n} = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_T \mathbf{1}_{T<n-1}] + \mathbb{E}[M_{n-1}\mathbf{1}_{T=n-1}] = 0 + 1 \cdot \mathbb{P}[T = n-1].$$

Pozostaje wyjaśnić, że $\mathbb{A} = \{T = n-1\}$...