Teoria Prawdopodobieństwa 2

Lista zadań nr 5

W poniższych zadaniach W_t oznacza standardowy ruch Browna (proces Wienera).

1. Uzasadnij, że rozkłady skończenie wymiarowe W_t są normalne.

2. Oblicz $\mathrm{cov}(W_t, W_s)$ dla dowolnych $s, t > 0$.

3. Most Browna definiujemy jako proces $U_t = W_t - tW_1$ dla $t \in [0, 1]$. Wyznacz jego funkcję kowariancji, tzn. oblicz $\mathrm{cov}(U_t, U_s)$. Czy U_t i W_1 są niezależne?

4. Wykaż, że poniższe procesy są procesami Wienera

- $-W_t$;
- $c^{-1/2}W_{ct}$, dla stałej $c \geq 0$;
- $Y_t = tW_{1/t}$ dla $t > 0$ i $Y_0 = 0$;

5. Podczas wykładu ruch Browna został zdefiniowany dla $t \in [0, 1]$. Wyjaśnij, jak rozszerzyć tę konstrukcję do zbioru $[0, \infty)$. Uzasadnij, że zdefiniowany przez Ciebie proces spełnia definicję ruchu Browna.

6. Oblicz

- $\mathbb{P}[B_3 \geq 1/2]$;
- $\mathbb{P}[B_1 \leq 1/2, B_3 > B_1 + 2]$;
- $\mathbb{P}(E)$, gdzie E jest zdarzeniem, że ruch Browna nie przetnie lini $y = 6$ to czasu $t = 10$;
- $\mathbb{P}[B_4 \leq 0 | B_2 \geq 0]$.

7. Pokaż, że z prawdopodobieństwem 1 dla każdego $N < \infty$ istnieje $t > N$ takie, że $W_t = 0$. Pokaż, że z prawdopodobieństwem 1 dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $t \in (0, \varepsilon)$ takie, że $W_t = 0$.

8. (Prawo wielkich liczb) Pokaż, że

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = 0 \qquad \text{p.w.}$$

9. Uzasadnij, że procesy $W_t^2 - t$ oraz $e^{cW_t - \frac{1}{2}c^2 t}$ ($c \in \mathbb{R}$) są martyngałami.

10. Niech W_t będzie standardowym ruchem Browna i niech $\mathcal{F}_t$ oznacza odpowiednią filtrację. Dla $s < t$ oblicz

- $\mathbb{E}[W_t^2 | \mathcal{F}_s]$;
- $\mathbb{E}[W_t^3 | \mathcal{F}_s]$;
- $\mathbb{E}[W_t^4 | \mathcal{F}_s]$;
- $\mathbb{E}[e^{4W_t - 2} | \mathcal{F}_s]$.

11. Dla ustalonych $a < 0 < b$ oznaczmy $T = \inf\{t : W_t \notin [a, b]\}$. Pokaż, że $\mathbb{P}[T < \infty] = 1$ oraz oblicz $\mathbb{P}[W_T = a]$ i $\mathbb{E}[T]$.

12. Zdefiniujmy

$$Y_n = \sup\left\{|W_q| : q \in D \text{ and } q \le 2^{-n}\right\}$$

oraz

$$Y = \sup\left\{|W_q| : q \in D \text{ and } q \le 1\right\},$$

gdzie D jest zbiorem liczb diadycznych, tzn. liczb postaci $k/2^n$. Pokaż, że zmienne losowe Y_n i $2^{-n/2}Y$ mają taki sam rozkład.

13. Uzasadnij, że W_t jest p.w. funkcją α-hölderowską dla $\alpha < 1/2$, ale nie jest 1/2-hölderowska.

14. Pokaż, że prawie każda trajektoria ruchu Browna ma nieograniczone wahanie na dowolnym przedziale.

15. Znajdź rozkład zmiennej losowej $T_a = \inf\{t \ge 0 : \; W_t = a\}$.

16. Udowodnij, że dla dowolnego $t > 0$

$$\mathbb{P}[\max_{s \le t} W_s > 0] = \mathbb{P}[\max_{s \le t} W_s < 0] = 1,$$

tzn. ruch Browna w dowolnie małym odcinku przyjmuje zarówno wartości dodatnie jak i ujemne.

17*. Przeczytaj rozdziały 2.2-2.6 z książki *Random Walk and Heat Equation* G. Lawlera o funkcjach harmonicznych, problemie Dirichleta, równaniu ciepła i ruchu Browna.