

TEORIA PRAWDOPODOBIENSTWA 2

LISTA ZADAŃ NR 6

1. Niech $\{X_i\}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $U(0, 1)$. Pokaż, że

- dla każdego $\beta \in (0, 1/2)$ istnieją stałe μ i σ^2 takie, że

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n X_i^{-\beta} - n\mu \right)$$

zbiega według rozkładu do zmiennej losowej rozkładu normalnego $N(0, 1)$.

- dla każdego $\beta \in (1/2, 1)$ istnieje stała $\alpha \in (0, 2)$ oraz ciągi $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ takie, że

$$\frac{1}{b_n} \left(\sum_{i=1}^n X_i^{-\beta} - a_n \right)$$

zbiega według rozkładu do stabilnej zmiennej losowej z parametrem α .

2. Niech X_t będzie procesem Poissona z parametrem 2. Oblicz

- $\mathbb{P}[X_3 \geq 2]$;
- $\mathbb{P}[X_4 \geq X_1 + 2 | X_1 = 4]$;
- $\mathbb{P}[X_1 = 1 | X_3 = 4]$.

3. Uzasadnij szczegółowo, że proces Poissona jest procesem Lévy'ego.

4. Niech X_t będzie rozkładem Poissona z parametrem 1. Znajdź funkcję $a(t)$ taką, że $X_t - a(t)$ jest martingale.

5. Niech X_t będzie procesem Poissona z parametrem λ . Oblicz $\mathbb{E}[X_t X_{t+s}]$.

6. Załóżmy, że X_t i Y_t są niezależnymi procesami Poissona z parametrami λ i μ odpowiednio. Pokaż, że $X_t + Y_t$ jest również procesem Poissona z parametrem $\lambda + \mu$.

7. Niech X_t będzie procesem Poissona z parametrem λ i niech T będzie zmienną losową niezależną od X_t o rozkładzie wykładniczym ze średnią $1/\mu$. Znajdź rozkład $N(t) = X_{t+T} - X_t$.

8. Niech X_t będzie procesem Poissona z parametrem λ . Załóżmy, że w każdym momencie skoku przeprowadzane są niezależnie losowe eksperymenty, w których możliwe jest k wyników $\{a_i\}_{1 \leq i \leq k}$ z prawdopodobieństwami $\{p_i\}_{1 \leq i \leq k}$. Niech $X_t(i)$ będzie procesem opisującym liczbę wyników a_i w czasie $[0, t]$. Pokaż, że $X_t(i)$ są niezależnymi procesami Poissona z parametrami λp_i .

9. Załóżmy, że X_t jest złożonym rozkładem Poissona z parametrem 2, w którym kolejne skoki mają rozkład $N(0, 1)$. Oblicz $\mathbb{E}[X_t]$, $\mathbb{E}[X_t^2]$, $\mathbb{E}[e^{X_t}]$.