Dyskretny rachunek prawdopodobieństwa

Lista zadań nr 1

1. (Przyjaciele w losowej przyjaźni) Niech $G = (V, E)$ będzie dowolnym grafem. Oznaczmy przez D stopień (liczbę sąsiadów) wierzchołka wybranego losowo (jednostajnie) spośród wszystkich wierzchołków. Wybierzmy teraz losową krawędź (jednostajnie ze zbioru wszystkich krawędzi), a następnie losowy jej koniec i oznaczmy przez D^* stopień wylosowanego wierzchołka. Pokaż, że

$$\mathbb{E}[D^*] \geq \mathbb{E}[D],$$

a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wierzchołki w grafie mają ten sam stopień.

2. (Moi przyjaciele mają więcej przyjaciół niż ja) Niech $G = (V, E)$ będzie dowolnym grafem. Oznaczmy przez D stopień wierzchołka v wybranego losowo (jednostajnie) spośród wszystkich wierzchołków. Następnie oznaczmy przez Y stopień losowo wybranego sąsiada v. Pokaż, że

$$\mathbb{E}[Y] \geq \mathbb{E}[D],$$

a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie wierzchołki w grafie mają ten sam stopień.

3. (Nierównośc Chernoffa, duże odchylenia) Niech $\{X_i\}_{i\geq 1}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Wówczas dla każdego $a \geq \mathbb{E}X_1$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq na\right) \leq e^{-nI(a)},$$

dla funkcji

$$I(a) = \sup_{t\geq 0} (ta - \log \mathbb{E}[e^{tX_1}]).$$

Ponadto dla każdego $a \leq \mathbb{E}X_1$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq na\right) \leq e^{-nI_-(a)},$$

dla funkcji

$$I_-(a) = \sup_{t\leq 0} (ta - \log \mathbb{E}[e^{tX_1}]).$$

4. (Duże odchylenia dla rozkładu dwumianowego) Niech X_n będzie zmienną losową o rozkładzie $Bin(n, p)$. Wówczas dla $a \in (p, 1]$,

$$\mathbb{P}(X_n \geq na) \leq e^{-nI(a)},$$

gdzie

$$I(a) = a \log(a/p) + (1 - a) \log((1 - a)/(1 - p)).$$

Ponadto

$$I(a) \geq I_p(a) := p - a - a \log(p/a).$$

5. Pokaż, że jeżeli X_i mają rozkład Poissona z parametrem λ, to

$$I(a) = I_\lambda(a) = a(\log(a/\lambda) - 1) + \lambda.$$

6. (Binarny proces gałązkowy) Rozważmy proces gałązkowy, w którym rozkład urodzin jest zadany przez $p_0 = 1 - p$, $p_2 = p$. Oblicz prawdopodobieństwo wymarcia procesu.

7. (Geometryczny proces gałązkowy) Rozważmy proces gałązkowy, w którym rozkład urodzin jest zadany przez $p_0 = 1 - b/p$, $p_k = b(1 - p)^{k-1}$ dla $k \geq 1$. Oblicz prawdopodobieństwo wymarcia procesu.

8. Niech X będzie zmienną losową o wartościach całkowitych całkowalną z kwadratem. Udowodnij nierówność

$$\mathbb{P}(X = 0) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathbb{E}[X^2]}$$

9. Niech $ER(n, p_n)$ dla $p_n = d/n$ i $d \geq 6^{1/3}$ będzie grafem Erdösa-Rényi'a. Udowodnij, że 'asymptotycznie prawie zawsze' istnieje co najmniej jeden trójkąt (tzn. trzy wierzchołki połączone wzajemnie krawędziami). **Wskazówka** Oszacuj $\mathbb{P}(X_n = 0)$ dla dużych n, gdzie X_n jest liczbą trójkątów w grafie losowym.

10. Niech $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, gdzie X_i są niezależne, ale niekoniecznie jednakowo rozłożone, o wartościach w $\{0, 1\}$, t.ż. $\mathbb{P}(X_i = 1) = p_i$. Niech $\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i$. Udowodnij, że dla każdego $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(X - \mu \geq \varepsilon\mu) \leq e^{\mu h(\varepsilon)}$$

oraz

$$\mathbb{P}(X - \mu \leq \varepsilon\mu) \leq e^{\mu h(-\varepsilon)}$$

dla $h(\varepsilon) = (1 + \varepsilon)\log(1 + \varepsilon) - \varepsilon$.

11. Niech $ER(n, p_n)$ będzie grafem Erdösa-Rényi'a. Załóżmy, że $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{(n-1)p_n} = 0$. Udowodnij, że asymptotycznie, gdy $n \to \infty$ nie istnieje wierzchołek, którego stopień różni się od $(n-1)p_n$ o więcej niż $2\sqrt{\frac{\log n}{(n-1)p_n}}$.

12. Załóżmy, że zmienne losowe Y_n są liczbą urodzin dla różnych rokładów, które zbiegają według rozkładu do pewnej zmiennej losowej Y i $\mathbb{P}(Y = 1) < 1$. Oznaczmy odpowiednie prawdopodobieństwa wymarcia przez q_n i q. Pokaż, że $q_n \to q$.

13. Niech $\{X_n\}$ będzie łańcuchem Markowa na $\mathbb{N}$ takim, że rozkład X_{n+1} pod warunkiem X_n ma rozkład $Pois(X_n)$. Pokaż, że p.w. dla dużych n zachodzi $X_n = 0$.

14. Korzystając z własności martyngałów pokaż, że jeżeli $\mathbb{E}X \leq 1$ i $p_1 \neq 1$, to proces gałązkowy $\{Z_n\}$ wymiera p.w.

15. Niech T będzie losowym drzewem reprezentującym proces gałązkowy w przypadku nadkrytycznym ($\mathbb{E}X > 1$). Pokaż, że na zbiorze przeżycia, prosty spacer losowy na T (tzn. w każdym kroku wybierający jednostajnie jednego z sąsiadów) jest chwilowy (tzn. odwiedza każdy skończony zbiór skończenie wiele razy).