

# DYSKRETNY RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

## LISTA ZADAŃ NR 2

- 1\***. Zapoznaj się z dowodem twierdzenia Kestena-Stiguma (np. Peres, Lyons, *Probability on Trees and Networks*, dostępne online).
- 2\***. (Przejście fazowe dla średnicy) Pokaż, że przejście fazowe dla własności, że  $ER(n, p)$  ma średnicę 2, wynosi  $p = \sqrt{\frac{2 \log n}{n}}$ . Dokładniej pokaż, że jeżeli  $p > \sqrt{\frac{c \log n}{n}}$  dla  $c > 2$ , to z prawdopodobieństwem 1 średnica wynosi 2, a jeżeli  $p < \sqrt{\frac{c \log n}{n}}$  dla  $c < 2$ , to z prawdopodobieństwem 1 średnica jest większa od 2. **Wskazówka:** rozważ 'złe pary', czyli pary wierzchołków, które są oddalone od siebie o więcej niż 2.
- 3\***. (Przejście fazowy dla cykli) Pokaż, że przejście fazowe dla własności, że  $ER(n, p)$  zawiera cykl, wynosi  $p = 1/n$ .
- 4.** (Przejście fazowe dla izolowanych wierzchołków) Pokaż, że przejście fazowe dla własności, że  $ER(n, p)$  zawiera izolowane wierzchołki, wynosi  $p = \frac{\log n}{n}$ .
- 5.** (Ścieżki Hamiltona) W zależności od parametru  $\lambda = pn$  oszacuj wartość oczekiwaną liczby ścieżek Hamiltona w grafie  $ER(n, p)$ . Przedyskutuj otrzymany wynik.
- 6.** Oblicz prawdopodobieństwo, że w grafie  $ER(n, 1/n)$  istnieje wierzchołek stopnia  $\log n$ . Opisz asymptotyczne zachowanie otrzymanego wyrażenia.
- 7.** Oblicz liczbę oczekiwaną kwadratów (4-cykli) w  $ER(n, d/n)$ .
- 8.** Oblicz liczbę oczekiwaną wystąpień klik  $K_4$  w  $ER(n, d/n)$ . (\*) Pokaż, że  $p = n^{-2/3}$  jest przejściem fazowym