Dyskretny rachunek prawdopodobieństwa

Lista zadań nr 3

1. Pokaż, że jeżeli łańcuch Markowa jest nieredukowalny, to wszystkie punkty mają ten sam okres.
2. Jeżeli łańcuch Markowa jest nieredukowalny i aperiodyczny, to istnieje M takie, że $P^t(x,y) > 0$ dla wszystkich $x, y \in \Omega$ oraz $t \geq M$.
3. Pokaż, że nierozkładalny łańcuch Markowa posiada co najwyżej jedną miarę stacjonarną. **Wskazówka:** Niech P będzie macierzą przejścia, wówczas jedynymi funkcjami harmonicznymi (tzn. spełniającymi $Ph = h$) są funkcje stałe ...
4. Uzasadnij, że jeżeli łańcuch Markowa ma dwie miary stacjonarne, to ma ich nieskończenie wiele.
5. (Inny dowód istnienia miary stacjonarnej) Niech P będzie macierzą przejścia łańcucha Markowa na skończonej przestrzeni stanów Ω. Dla dowolnego rozkładu początkowego μ na Ω i $n > 0$ definiujemy

$$\nu_n = \frac{1}{n}(\mu + \mu P + \cdots + \mu P^{n-1}).$$

- Pokaż, że dla każdego $x \in \Omega$ i $n > 0$,

$$|\nu_n P(x) - \nu_n(x)| \leq \frac{2}{n}.$$

- Pokaż, że istnieje podciąg $\{\nu_{n_k}\}$ taki, że $\lim_{k\to\infty} \nu_{n_k}(x)$ istnieje dla każdego $x \in \Omega$.
- Dla $x \in \Omega$ zdefiniujmy $\nu(x) = \lim_{k\to\infty} \nu_{n_k}(x)$. Wykaż, że ν jest miarą stacjonarną P.

6. (Kolekcjonowanie kuponów) Kolekcjoner zbiera kupony n różnych typów. Za każdym razem, gdy kupuje nowy kupon, rozkład ich typów jest jednostajny. Niech τ oznacza moment, gdy zbierze pełną kolekcję.

- Oblicz $\mathbb{E}\tau$.**Wskazówka:** niech X_t oznacza liczbę różnych typów zgromadzonych przez kolekcjonera w chwili t
- Pokaż, że dla $c > 0$

$$\mathbb{P}[\tau > n \log n + cn] \leq e^{-c}$$

  Wskazówka: Niech A_i oznacza zdarzenie, że wśród pierwszych $n \log n + cn$ kuponów nie było kuponu i-tego typu...

7. Niech μ będzie miarą probabilistyczną na skończonej grupie G. Pokaż, że spacer losowy generowany przez μ jest nieredukowalny wtedy i tylko wtedy, gdy $S = \{g \in G : \mu(g) > 0\}$ generuje G (tzn. najmniejszą grupą zawierającą S jest G).
8. Pokaż, że spacer losowy na G generowany przez μ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy miara μ jest symetryczna, tzn. $\mu(g) = \mu(g^{-1})$ dla każdego g
9. Spacer losowy na torusie. Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Rozważmy łańcuch Markowa na przestrzeni stanów

$$\Omega = \{(x, y) : \ x \in \{0, \ldots, m-1\}, y \in \{0, \ldots, n-1\}\}.$$

Jeżeli proces jest w stanie (x, y), to przechodzi do stanów $((x+1)\mathrm{mod} m, y)$ lub $(x, (y+1)\mathrm{mod} n)$ z prawdopobobieństwem $1/2$.

- Pokaż, że ten łańcuch Markowa jest nieredukowalny.
- Pokaż, że proces jest aperiodyczny wtedy i tylko wtedy gdy NWD $(m, n) = 1$.

10. Rozważmy spacer losowy na $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$, w którym cząsteczka porusza się w lewo lub w prawo z prawdopobobieństwem $1/2$, za wyjątkiem punktów 0 i n. W punkcie n spacer pozostaje lub przechodzi do $n-1$ z prawdopobobieństwem $1/2$. Stan 0 jest stanem absorbującym, a więc po trafieniu w niego cząsteczka pozostanie w nim na zawsze. Oblicz wartość oczekiwaną czasu trafienia w 0 cząsteczki, która startuje w punkcie n.
11. Niech $\{X_t\}$ i $\{Y_t\}$ będą dwoma niezależnymi nieredukowalnymi i aperiodycznymi łańcuchami Markowa z tą samą macierzą przejścia P. Niech $T = \inf\{t : X_t = Y_t\}$. Pokaż, że istnieją stałe $\beta \in (0, 1)$ i $C > 0$ takie, że dla każdego t

$$\mathbb{P}(T > t) \leq C\beta^t.$$