Dyskretny rachunek prawdopodobieństwa

Lista zadań nr 4

1. Niech $\{X_t\}$ będzie nieredukowalnym i aperiodycznym łańcuchem Markowa z miarą stacjonarną π. Oznaczmy przez $N(x,t)$ liczbę wizyt w punkcie x w pierwszych t krokach. Pokaż, że

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathbb{E}[N(x,t)] = \pi(x)$$

oraz $\frac{1}{t}N(x,t)$ zbiega do $\pi(x)$ według prawdopodobieństwa.

2. Rozważmy prosty spacer losowy na pełnym grafie, tzn. będąc w wierzchołku x przechodzimy do y z prawdopodobieństwem $1/n$. Niech T będzie momentem, gdy odwiedzimy ostatni wierzchołek grafu. Oblicz $\mathbb{E}T$.

3. Łańcuch Markowa nazywamy odwracalnym, jeżeli istnieje probabilistyczna miara odwracalna π spełniająca

$$\pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(x,y)$$

dla dowolnych $x, y \in \Omega$. Pokaż, że dla takiego łańcucha miara π jest stacjonarna.

4. Pokaż, że prosty spacer losowy na grafie jest odwracalny.

5. W dwóch urnach znajduje się w sumie k kul (k-ustalona liczba). Definiujemy w następujący sposób łańcuch Markowa. W każdym kroku losujemy jednostajnie jedną z kul i przekładamy ją do sąsiedniej urny. Niech X_t oznacza liczbę kul znajdujących się w czasie t w pierwszej urnie. Wówczas X_t jest łańcuchem Markowa. Znajdź jego miarę stacjonarną. Pokaż, że proces jest odwracalny.

6. Niech $X_t = (x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \ldots, x_n^{(t)})$ będzie pozycją leniwego spaceru losowego na n-hiperkostce $\Omega = \{0,1\}^n$ w chwili t. Rozważmy odległość X_t od $\mathbf{0}$ daną wzorem $W_t = \|X_t\|_1 = \sum_{k=1}^n x_k^{(t)}$. Wówczas W_t jest łańcuchem Markowa. Wyznacz prawdopodobieństwa przejścia $P(x,y)$. Korzystając ze znajomości rozkładu stacjonarnego dla X_t wywnioskuj postać rozkładu stacjonarnego dla W_t. Porównaj otrzymany wynik z poprzednim zadaniem.

7. Pokaż, że dla dowolnych miar probabilistycznych na Ω zachodzi

$$\|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}} = \frac{1}{2}\sum_{x\in\Omega} |\mu(x) - \nu(x)| = \sum_{\{x:\mu(x)>\nu(x)\}} (\mu(x) - \nu(x)).$$

8. Oblicz $\|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}}$ dla następujących przykładów

- $\mu \sim \mathrm{Bin}(4, 1/2)$, $\nu \sim \mathrm{Bin}(4, 1/4)$
- μ jest miarą jednostajną na S_n (grupie permutacji), a ν jest miarą jednostajną na wszystkich permutacjach zachowujących 1.

9. Pokaż, że

$$d(t) = \max_{x\in\Omega} \|P^t(x,\cdot) - \pi\|_{\mathrm{TV}}$$

jest ciągiem malejącym.