Dyskretny rachunek prawdopodobieństwa

Lista zadań nr 5

1. Pokaż, że dla leniwego spaceru losowego na $\mathbb{Z}^n$ zachodzi $t_{\text{miks}} \geq \delta n^2$, dla pewnego $\delta > 0$. Wskazówka: skorzystaj z definicji $\|\cdot\|_{\text{TV}}$ i rozważ zbiór $A_n = \{k \in \mathbb{Z}^n : |k| \geq n/4\}$.

2. Podczas wykładu pokazaliśmy, że dla leniwego spaceru na torusie $\mathbb{Z}_n^d$ zachodzi $t_{\text{miks}} \leq d^2n^2$. Pokaż jak otrzymać lepsze szacowanie $t_{\text{miks}} \leq O(d \log d)n^2$. W tym celu należy przeanalizować dowód podany na wykładzie. Niech $t > kdn^2$.

- Oszacuj prawdopobobieństwo zdarzenia, że w czasie t pierwsze współrzędne obu spacerów są różne, przez $(1/4)^k$
- Wybierz odpowiednie k i rozważ wszystkie współrzędne.

3*. Pokaż, że dla leniwego spaceru losowego na $\mathbb{Z}_2^n$, $t_{\text{miks}} \geq (1/2)n \log n$. (Dowód można znaleźć w [LPW], Propozycja 7.13).

4. Niech
$$\Omega = \{x \in \{0,1\}^{n+1} : x(n+1) = 1\}.$$
Spacer losowy zdefiniowany jest następująco. W kroku $t+1$ wybieramy losowo jedną ze współrzędnych k ze zbioru $\{1,\ldots,k\}$ i jeżeli $x_t(k+1) = 1$, to zmieniamy wartość k-tej współrzędnej, definiując w ten sposób X_{t+1}. Znajdź miarę stacjonarną. Pokaż, że $t_{\text{miks}} \geq n^2 - 2n^{3/2}$.

5. Znajdź oszacowania t_{miks} dla 'hardcore model' omówionego podczas wykładu.

6. Znajdź silny czas jednostajny dla zmodyfikowanego leniwego spaceru losowego na $\mathbb{Z}_2^n$ takiego, że będąc w stanie X_t pozostajemy w nim z prawdopobobieństwem $1/(n+1)$, a z prawdopobobieństwem $1/(n+1)$ przechodzimy do jednego z sąsiadów.

7. Niech G będzie skończoną grupą i μ miarą probabilistyczną na G. Załóżmy, że istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że
$$\mathbb{P}[X_1 \in A] \geq \varepsilon U(A)$$
dla każdego $A \subset G$ (przypomnijmy $X_0 = e$), gdzie U jest miarą jednostajną na G. Znajdując odpowiedni silny czas stacjonarny, pokaż że
$$\|\mu_t - U\| \leq (1-\varepsilon)^t,$$
gdzie μ_t jest rozkładem X_t. **Wskazówka:** skorzystaj z rozkładu $\mu = \varepsilon U + (1-\varepsilon)\widetilde{\mu}$.

8. Rozważmy następujący sposób tasowania kart (odwrotny do Top To Random). Wyciągamy (losowo) jedną z kart z talii i kładziemy ją na górze talii. Oszacuj czas mieszania t_{miks}.

9. Skonstruuj silny czas zatrzymania dla leniwego spaceru na $\mathbb{Z}_{2^k}$, a następnie oblicz jego wartość oczekiwaną. **Wskazówka:** postępuj przez indukcję.

10*. Pokaż, że w tasowaniu Riffle Shuffle $t_{\text{miks}}(\varepsilon) \leq 2\log_2(4n/3)$.

11. Pokaż, że
$$t_{\text{miks}}(\varepsilon) \geq \frac{\log(|\Omega|(1-\varepsilon))}{\log \Delta},$$
gdzie $\Delta = \max_{x\in\Omega} |\{y : P(x,y) > 0\}|$.

12. Korzystając z powyższego zadania uzasadnij, że w metodzie Riffle Shuffle tasowania n kart: $t_{\text{miks}}(\varepsilon) \geq (1-\delta)\log_2 n$, dla ustalonych z góry $\varepsilon, \delta > 0$ oraz odpowiednio dużych n.

13*. ([LPW], strona 96) Pokaż, że w tasowaniu Top To Random $t_{\text{miks}}(\varepsilon) \geq n \log n - \alpha n$. (Dowód można znaleźć w [LPW], Propozycja 7.14, str. 96).