Dyskretny rachunek prawdopodobieństwa

Lista zadań nr 6

1. Chcemy wygenerować losową permutację $\sigma \in S_n$, tzn funkcję różnowartościową $\sigma : \{1,\ldots,n\} \mapsto \{1,\ldots,n\}$. Stosujemy następujący algorytm. Dla każdego i podstawiamy za $\sigma(i)$ losową liczbę ze zbioru $\{1,\ldots,n\}$. Kolejne losowania są niezależne i jednostajne. Jeżeli otrzymana funkcja jest permutacją, to kończymy. W przeciwnym razie powtarzamy procedurę. Oszacuj oczekiwaną liczbę losowań niezbędnych do wygenerowania permutacji.

2. Rozważmy następujący algorytm generujący losową permutację $\sigma \in S_n$. Przyjmujemy $\sigma_0 = Id$. Następnie dla $k = 1,\ldots,n-1$ postępujemy indukcyjnie. Mając zadane σ_{k-1} losujemy liczbę J_k jednostajnie spośród $\{k,\ldots,n\}$. Definiujemy σ_k, zamieniając wartości $\sigma_{k-1}(k)$ z $\sigma_{k-1}(J_k)$, tzn. $\sigma_k(k) = \sigma_{k-1}(J_k)$, $\sigma_k(J_k) = \sigma_{k-1}(k)$, a dla pozostałych wartości $\sigma_k(i) = \sigma_{k-1}(i)$. Pokaż, że σ_{n-1} ma rozkład jednostajny na S_n. Załóżmy, że liczby J_k są losowane ze zbioru $\{1,\ldots,n\}$. Czy wówczas σ_{n-1} ma rozkład jednostajny na S_n?

3. Czy prawdziwe jest następujące zdanie: niech Q będzie rozkładem na S_n i niech σ będzie losową permutacją o rozkładzie Q, wówczas jeżeli

$$\mathbb{P}[\sigma(i) > \sigma(j)] = 1/2,$$

dla każdych i,j, to Q jest rozkładem jednostajnym na S_n.

4. Czy prawdziwe jest następujące zdanie: niech Q będzie rozkładem na S_n i niech σ będzie losową permutacją o rozkładzie Q, wówczas jeżeli

$$\mathbb{P}[\sigma(i) = j)] = 1/n,$$

dla każdych i,j, to Q jest rozkładem jednostajnym na S_n.

5. Wylosujmy (niezależnie i jednostajnie) n punktów z odcinka $[0,1]$. Oznaczmy je rosnąco $x_1,\ldots x_n$. Następnie zastosujmy odwzorowanie piekarza $x \mapsto 2x \bmod 1$ do tych punktów. Pokaż, że indukowana permutacja punktów ma dokładnie taki sam rozkład jak w tasowaniu Riffle Shuffle.

6*. ([LPW], strony 101-106) Opowiedz o tasowaniu przez losowe permutacje.

7. Niech P będzie macierzą przejścia skończonego łańcucha Markowa. Jeżeli λ jest wartością własną P, to $|\lambda| \leq 1$.

8. Jeżeli P jest nieredukowalna, to przestrzeń własna odpowiadająca 1 jest jednowymiarowa. Jeżeli P jest nieredukowalna i aperiodyczna, to -1 nie jest wartością własną P.

9. Załóżmy, że łańcuch Markowa jest nieredukowalny. Pokaż, że $\{t : P^t(x,x) > 0\} \subset 2\mathbb{Z}$ wtedy i tylko wtedy gdy -1 jest wartością własną P. Pokaż, że $\{t : P^t(x,x) > 0\} \subset k\mathbb{Z}$ wtedy i tylko wtedy gdy pierwiastek k-tego stopnia z 1 jest wartością własną P.

10. Niech $\widetilde{P} = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}I$ będzie macierzą przejścia leniwej wersji spaceru losowego generowanego przez macierz przejścia P. Pokaż, że wszystkie wartości własne $\widetilde{P}$ są nieujemne.

11. Niech P będzie odwracalne względem π. Wówczas przestrzeń $l^2(\pi)$ ma bazę ortonormalną złożoną z rzeczywistych funkcji własnych P oraz macierz P można rozłożyć

$$\frac{P^t(x,y)}{\pi(y)} = \sum_{j=1}^{|\Omega|} f_j(x) f_j(y) \lambda_j^t.$$

Ponadto

$$P^t f = \sum_{j=1}^{|\Omega|} \langle f f_j \rangle_\pi f_j \lambda_j^t.$$

12. Rozważmy spacer losowy na $\{0, 1 \ldots, n\}$ taki, że

$$P(k, k-1) = P(k, k+1) = \frac{1}{2} \quad \text{dla } k = 1, \ldots, n-1$$

oraz $P(0, 1) = P(n, n-1) = 1$. Znajdź wartości własne i funkcje własne P.

13. Rozważmy spacer losowy na $0, 1 \ldots, n$ taki, że

$$P(k, k-1) = P(k, k+1) = \frac{1}{2} \quad \text{dla } k = 1, \ldots, n-1$$

oraz

$$P(0, 1) = P(0, 0) = P(n, n-1) = P(n, n) = \frac{1}{2}.$$

Znajdź wartości własne i funkcje własne P.

14. Używając metody spektralnej oszacuj czas mieszania dla prostego spaceru losowego na torusie $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

15*. ([LPW], str. 234) Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie niezależnym ciągiem rzutów monetą. Niech

$$\tau_{ORO} = \inf\{t : X_{t-2} X_{t_1} X_t = ORO\}.$$

Oblicz $\mathbb{E}\tau_{ORO}$. Oblicz wartości oczekiwane czasów zatrzymania dla innych wzorców.