Dyskretny rachunek prawdopodobieństwa

Lista zadań nr 7

1. Uzasadnij, że można wzmocnić tezę twierdzenia Shannona i pokazać istnienie liniowej funkcji kodującej, tzn. takiej funkcji $E_{k,n} : \{0,1\}^k \mapsto \{0,1\}^n$, że dla dowolnych słów $m_1, m_2 \in \{0,1\}^k$ zachodzi $E_{k,n}(m_1 + m_2) = E_{k,n}(m_1) + E_{k,n}(m_2)$.

2. Niech X będzie dowolną zmienną losową o wartościach w skończonych zbiorze Ω. Pokaż, że

$$0 \leq H(X) \leq \log |\Omega|.$$

Ponadto, $H(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest stałą, a $H(X) = \log |\Omega|$ wtedy i tylko wtedy gdy X ma rozkład jednostajny na Ω.

3. Oblicz entropię rozkładu geometrycznego. Uzasadnij, że spośród wszystkich zmiennych losowych o wartościach w zbiorze $\mathbb{N}_0$ i zadanej wartości oczekiwanej μ, największą entropię ma zmienna losowa o rozkładzie geometrycznym.

4. Niech X_1 i X_2 będą niezależymi zmiennymi losowymi o wartościach w zbiorach Ω_1 i Ω_2. Pokaż, że

$$H((X_1, X_2)) = H(X_1) + H(X_2).$$

5. Niech X_1 i X_2 będą zmiennymi losowymi o wartościach w zbiorach Ω_1 i Ω_2. Pokaż, że

$$H((X_1, X_2)) \leq H(X_1) + H(X_2),$$

a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy X_1 i X_2 są niezależne.

6. Niech X będzie dowolną zmienną losową o wartościach w skończonych zbiorze Ω i niech $\phi : \Omega \mapsto \Omega$ będzie dowolną funkcją deterministyczną. Pokaż, że $H((X, \phi(X))) = H(Y)$.

7. Niech X będzie dowolną zmienną losową o wartościach w skończonych zbiorze Ω i niech $Y = \phi(X)$, gdzie $\phi : \Omega \mapsto \Omega_1$ jest pewną injekcją. Pokaż, że $H(X) = H(Y)$.

8. Rozważmy monetę, w której orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p \neq 1/2$. Pokaż, że dla dowolnego $\delta > 0$ oraz dostatecznie dużych n, jeżeli $m \in \{O, R\}^n$ jest wynikiem n kolejnych rzutów monetą, to:

- istnieje funkcja kompresji $c_n : \{O, R\}^n \mapsto \{O, R\}^{\mathbb{N}}$ taka, że wartość oczekiwana długości słowa $c_n(m)$ wynosi co najwyżej $(1 + \delta)nH(p)$;
- dla każdej funkcji kompresji $c_n : \{O, R\}^n \mapsto \{O, R\}^{\mathbb{N}}$ wartość oczekiwana długości słowa $c_n(m)$ wynosi co najmniej $(1 - \delta)nH(p)$;

Poniższe zagadnienia należy przedstawić znajdując odpowiednią literaturę np. w internecie.

9. Opowiedz o kodowaniu Huffmana. Omów teoretyczne własności i związkach z entropią.

10. Opowiedz o kodowaniu Shannona-Fano-Eliasa. Omów jego teoretyczne własności i związkach z entropią.