SPACERY LOSOWE

DARIUSZ BURACZEWSKI, PIOTR DYSZEWSKI

1. Wstęp

Wykład poświęcony będzie spacerom losowym na grafach. Dokładne definicje zostaną podane poniżej. Załóżmy, że mamy dany skończony zbiór wierzchołków (np. pewien zbiór punktów na płaszczyźnie), z których niektóre połączone są krawędziami. Spacer losowy oznacza, że po grafie porusza się pewna cząsteczka (wędrowiec), która będąc w jednym z punktów wybiera losowo jednego z jego sąsiadów (według z góry określonego prawdopodobieństwa) i przechodzi do niego. Następnie powtarza tę czynność wielokrotnie.

Ten prosty proces kryje w sobie wiele pytań:

- Jakie jest prawdopobobieństwo, że po n krokach odwiedzimy dany wierzchołek?
- Po jakim czasie odwiedzimy wszystkie wierzchołki?
- Jak często będziemy przechodzić przez dany wierzchołek?
- Po jakim czasie wrócimy do danego wierzchołka?
- Jak długo aktualna pozycja zależy od punktu startu?
- Co można powiedzieć o procesie, po upływie długiego czasu?

Powyższe problemy, chociaż czysto teoretyczne znajdują całą gamę praktycznych zastosowań:

- Jak długo należy tasować talię n kart, aby móc uznać ją za potasowaną? Można ten problem sprowadzić do spaceru losowego na dużym grafie składającym się z $n!$ elementów. Zajmiemy się tym podczas wykładu.
- W informatyce istnieje szereg trudnych obliczeniowo problemów. Jednym z kluczowych wyzwań jest problem czy $P = NP$, a więc czy dla dużej klasy ważnych problemów (np. problem komiwojażera, problem faktoryzacji liczb) istnieją szybkie algorytmy działające w czasie wielomianowym. Przy pomocy spacerów losowych na grafach konstruuje się algorytmy, które w szybkim czasie pozwalają na znalezienie przybliżonych rozwiązań. Grafy, które się pojawiają podczas analizy, są tak duże (ale ciągle skończone), że nie można wypisać ich wierzchołków.
- Wyszukiwarka Google pozycjonuje strony nadając im pewne wagi. W tym celu używany jest algorytm Pagerank. W dużym uproszczeniu, tworzy się wielki graf, którego wierzchołkami są wszystkie strony internetowe, a krawędzie oznaczają, że jedna strona linkuje do drugiej. Następnie rozważany jest

Skrypt został przygotowany dla uczestników warsztatów organizowanych przez Krajowy Fundusz na rzecz Dzieci, które odbyły się w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego w dniach 3-6 grudnia 2015 r.

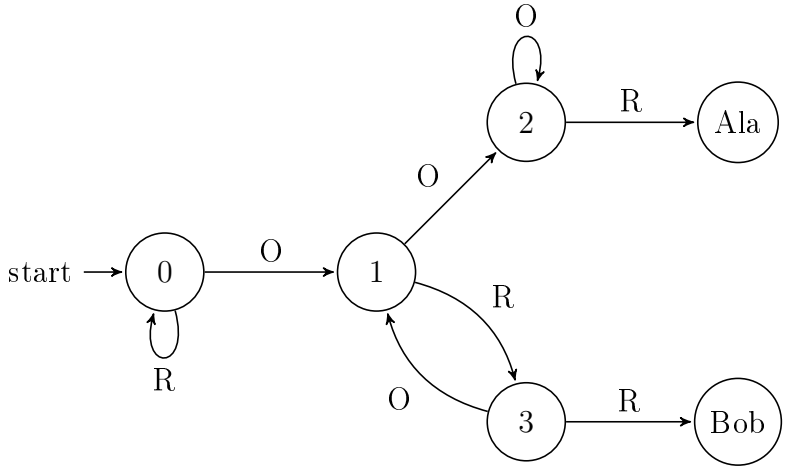
spacer losowy na tym grafie i dla każdej ze stron mierzy się jak często jest ona odwiedzana przez ten spacer. Im częściej, tym większy otrzymuje ranking.

2. Spacery losowe na skończonych grafach

2.1. **Spacery losowe w zadaniach.** Zanim przejdziemy do omawiania własności spacerów losowych pokażemy przykłady zadań, które można rozwiązać przy ich pomocy.

Zadanie 1. Alicja i Bill rzucają symetryczną monetą tak długo, aż wypadnie OOR lub ORR. Alicja wygrywa, gdy wzorzec OOR wypadnie jako pierwszy, natomiast Bill, gdy wypadnie ORR. Oblicz prawdopobobieństwo, że grę wygra Alicja.

Rozwiązanie. Powyższe zadanie można opisać przy pomocy spaceru losowego na grafie. Każdy wierzchołek grafu zawiera informacje o stopniu dopasowania końcowych wyników rzutu monetą do jednego z żądanych wzorców. Dla przykładu stan 3 oznacza, że ostatnie dwa wyniki to O i R.



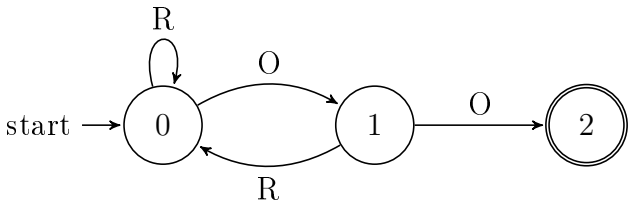
Oznaczmy przez p_i prawdopobobieństwo, że będąc w wierzchołku i dotrzemy do wierzchołka Ala. Wówczas otrzymujemy równania

$$\begin{aligned} p_A &= 1,\ p_B = 0, \\ p_2 &= \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_A, \\ p_3 &= \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_B, \\ p_0 = p_1 &= \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy $p_0 = 2/3$. □

Zadanie 2. Rzucamy symetryczną monetą. Niech X oznacza liczbę rzutów po których otrzymano ciąg OO. Oblicz $\mathbb{E}X$.

Rozwiązanie I. Podobnie jak wcześniej rysujemy automat.



Tym razem jednak chcemy obliczyć $\mathbb{P}[X = k]$, gdzie X jest liczbą kroków po których dotrzemy do stanu 2. W tym celu oznaczmy przez $p_0(n)$ i $p_1(n)$ prawdopodobieństwa dojścia z punktu 0 i 1 w dokładnie n krokach do 2. Otrzymujemy równania

$$\begin{aligned} &p_0(1) = 0,\ p_1(1) = 1/2, \\ &p_0(n) = \frac{1}{2}p_0(n-1) + \frac{1}{2}p_1(n-1), \qquad n \geq 2, \\ &p_1(n) = \frac{1}{2}p_0(n-1), \qquad n \geq 2. \end{aligned}$$

Można pokazać, że rozwiązanie jest postaci

$$p_0(n) = \frac{F_n}{2^n}, \qquad p_1(n) = \frac{F_{n-1}}{2^n}, \qquad n \geq 2.$$

gdzie F_n jest ciągiem Fibonacciego ($F_1 = 0$, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$). Otrzymujemy więc

$$\mathbb{E}X = \sum_{n=0}^{\infty} np_0(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nF_n}{2^n},$$

a powyższą sumę można zapisać w postaci zwartej. Szczegółowe rachunki pozostawiamy czytelnikowi. □

Rozwiązanie II. Oznaczmy przez Ω zbiór wszystkich ciągów kończących się ciągiem OO:

$$\Omega = \{\mathrm{OO}, \mathrm{ROO}, \mathrm{RROO}, \mathrm{OROO}, \mathrm{RRROO}, \mathrm{ROROO}, \mathrm{ORROO}, \ldots\}$$

Kolejne elementy oznaczmy przez $\omega_1, \omega_2, \ldots$, a przez p_i prawdopobobieństwo, że rzucanie monetą zakończy się ciągiem ω_i. Chcemy policzyć

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} |\omega_i| p_i,$$

gdzie $|\omega_i|$ oznacza długość ciągu ω_i. Zauważmy, że

$$\Omega = \mathrm{OO} \cup \mathrm{R}\Omega \cup \mathrm{OR}\Omega$$

Mamy więc

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\omega_i| p_i = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (|\omega_i| + 1) p_i + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\infty} (|\omega_i| + 2) p_i$$

czyli

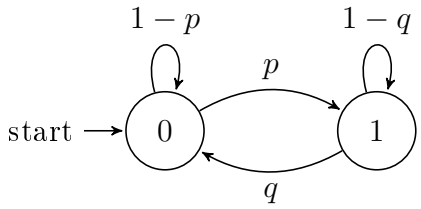
$$\mathbb{E}X = \frac{1}{2} + \frac{\mathbb{E}X}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\mathbb{E}X}{4} + \frac{1}{2}$$

i stąd $\mathbb{E}X = 6$. $\square$.

Więcej tego typu przykładów można znaleźć w książce [5] (rozdział 8).

2.2. **Spacer losowy na zbiorze dwuelementowym.**

Przykład 2.1. Rozważmy spacer losowy na zbiorze dwuelementowym $\Omega = \{0, 1\}$ zdefiniowany następująco. Cząsteczka początkowo znajduje się w punkcie 0. Rzucamy monetą m_0, niekoniecznie symetryczną. Jeżeli wypadnie orzeł, z prawdopobobieństwem p, to cząsteczka przemieszcza się do 1, w przeciwnym razie pozostaje w 0. W punkcie 1 używamy monety m_1, w której orzełek wypada z prawdopobobieństwem q. Jeżeli wypadnie orzeł, to cząsteczka idzie do 0.



Oznaczmy przez X_n pozycję spaceru w czasie n. Wówczas $X_0 = 0$, ale kolejne pozycje są już losowe:

$$\mathbb{P}[X_1 = 0] = 1 - p, \qquad \mathbb{P}[X_1 = 1] = p.$$

W drugim kroku:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_2 = 0] &= (1-p)^2 + pq, \\ \mathbb{P}[X_2 = 1] &= (1-p)p + p(1-q). \end{aligned}$$

Dla uproszczenia zapisu oznaczamy

$$\mu_n(0) = \mathbb{P}[X_n = 0], \qquad \mu_n(1) = \mathbb{P}[X_n = 1].$$

Wówczas μ_n będziemy nazywać rozkładem procesu w czasie n. Spełnione są następujące zależności rekurencyjne

$$\begin{aligned} \mu_n(0) &= (1-p)\mu_{n-1}(0) + q\mu_{n-1}(1), \\ \mu_n(1) &= p\mu_{n-1}(0) + (1-q)\mu_{n-1}(1). \end{aligned}$$

Oczywiście $\mu_n(0) + \mu_n(1) = 1$. Można wyliczyć bezpośrednio kolejne kroki, ale to jest kłopotliwe. Zastanówmy się jak będzie wyglądał ciąg μ_n, gdy n zbiega do nieskończoności. Okazuje się, że te wartości zbiegają do pewnej granicy, tzn

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(0) = \pi(0) \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{n\to\infty} \mu_n(1) = \pi(1).$$

Pokazanie powyższego nie jest jednak łatwe. Ale spróbujmy podejść do problemu inaczej. Zgadnijmy jaka powinna być granica, a potem pokażemy, że ten ciąg jest

rzeczywiście zbieżny do niej. Po chwili namysłu otrzymujemy dwa równania na graniczne współczynniki:

$$\begin{cases} \pi(0)+\pi(1)=1 \\ (1-p)\pi(0)+q\pi(1)=\pi(0) \end{cases}$$

Łatwo obliczyć, że wówczas rozkład π powinien być postaci

$$\pi(0)=\frac{q}{p+q}, \qquad \pi(1)=\frac{p}{p+q}.$$

Aby przekonać się, że zbieżność rzeczywiście ma miejsce zdefiniujmy

$$\varepsilon_n=\mu_n(0)-\pi(0).$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &= \mu_n(0)(1-p)+(1-\mu_n(0))q-\pi(0) \\ &= \mu_n(0)(1-p-q)+\pi(0)(p+q)-\pi(0) \\ &= (1-p-q)\varepsilon_n. \end{aligned}$$

Zatem, jeżeli $0<p+q<2$ (równoważnie $|1-p-q|<1$), to

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(0)=\pi(0) \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{n\to\infty}\mu_n(1)=\pi(1).$$

Zauważmy, że jeżeli $p+q=1$ (np. $p=q=1/2$), to niezależnie od wartości X_0 już w pierwszym kroku $\mathbb{P}[X_1=0]=\mathbb{P}[X_1=1]=1/2$. Co dzieje się w przypadku $|1-p-q=1|$? □

2.3. **Spacery losowe na ogólnych grafach.** Chcemy badać spacery losowe na ogólnych (często bardzo dużych) grafach. Grafem skierowanym nazywamy zbiór wierzchołków V, z których niektóre są połączone krawędziami. Zbiór krawędzi, który będziemy oznaczać przez E jest to więc zbiór par wierzchołków

$$E\subset\{(x,y):\ x,y\in V\}.$$

Ponadto piszemy $x\to y$ jeżeli są one połączone krawędzią z początkiem w x i końcem w y ($(x,y)\in E$).

Na grafie badamy spacer losowy, tzn. każdej krawędzi przyporządkowujemy prawdopobobieństwo przejścia z x do y i będziemy je oznaczać przez $P(x,y)$. Uwaga, może się zdarzyć, że $P(x,y)\neq P(y,x)$. Oczywiście chcemy, aby

$$\sum_{y:\ x\to y}P(x,y)=1.$$

Dopuszczamy sytuację (ale będziemy o tym przypominać), że $(x,x)\in E$ i $P(x,x)>0$ (taka sytuacja miała miejsce w ostatnim przykładzie).

Na grafie rozważamy spacer losowy. A więc startujemy w pewnym punkcie $X_0=x$, a następnie poruszamy się zgodnie z prawdopodobieństwem wskazanym przez P. Kolejne kroki będziemy oznaczać przez X_1, X_2, ..., wtedy

$$\mathbb{P}[X_{n+1}=y|X_n=x]=P(x,y).$$

Podobnie jak wcześniej chcemy zbadać zachowanie ciągu

$$\mu_n(x)=\mathbb{P}[X_n=x],$$

czyli rozkładu X_n. Możemy spróbować powtórzyć wcześniejsze rozumowanie. Ciąg μ_n spełnia równanie rekurencyjne

$$\mu_n(x) = \sum_{y:y\to x} P(y,x)\mu_{n-1}(y)$$

Kluczowym pytaniem jest, czy ciąg μ_n jest zbieżny? Jeżeli tak i granicę oznaczymy przez π, to powinna ona spełniać warunki:

$$\pi(x) = \sum_{y:y\to x} P(y,x)\pi(y) \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{y\in V}\pi(y) = 1 \tag{2.1}$$

dla każdego wierzchołka $x \in V$. Wówczas π nazywamy rozkładem stacjonarnym. Jeżeli w pewnej chwili n, pozycja X_n ma rozkład stacjonarny, czyli $\mathbb{P}[X_n = x] = \mu_n(x) = \pi(x)$, to z równania (2.1) wynika, że pozycja cząsteczki w następnym kroku X_{n+1} również ma rozkład stacjonarny, ponieważ

$$\mu_{n+1}(x) = \sum_{y:y\to x} P(y,x)\mu_{n-1}(y) = \sum_{y:y\to x} P(y,x)\pi(y) = \pi(x).$$

Możemy myśleć, że początkowo w punkcie $X_0 = x$ znajduje się masa jednostkowa i w kolejnych krokach rozprzestrzenia się po grafie zgodnie z funkcją P. Spodziewamy się, że po pewnym czasie powinna się ona albo stabilizować, albo być blisko rozkładu stacjonarnego.

Powyższe stwierdzenie zazwyczaj jest prawdą. Istnieją jednak złośliwe przykłady, które musimy wykluczyć z naszych rozważań.

Przykład 2.2. Rozważmy spacery losowe na poniższych grafach

Zauważmy, że graf po lewej strony składa się z 10 wierzchołków i odwiedzamy na zmianę wierzchołki $\circ$ oraz $\bullet$. Jeżeli punkt początkowy X_0 jest postaci $\circ$, to w parzystych krokach też jesteśmy w wierzchołkach tego typu. Takie grafy nazywamy cyklicznymi.

Dokładniej, graf nazywamy **cyklicznym**, jeżeli zbiór wierzchołków V możemy podzielić na n zbiorów V_1, V_2, $\ldots V_n$ takich, że ze zbioru V_k w jednym kroku można przejść jedynie do zbioru $V_{(k+1) \bmod n}$. Drugi graf nie jest już cykliczny (wymaga to chwili zastanowienia).

Innym problemem jest sytuacja gdy istnieją wierzchołki x, y takie, że z punktu x nie można dotrzeć do y. Mówimy wówczas, że graf jest **redukowalny**.

Poza tymi dwoma przypadkami zachodzi jednak twierdzenie

Twierdzenie 2.2. *Rozważmy spacer losowy na grafie, który nie jest cykliczny i nie jest redukowalny. Wtedy μ_n zbiega do rozkładu stacjonarnego π, czyli $\mu_n(x) \to \pi(x)$ dla każdego $x \in V$. Rozkład stacjonarny jest jedyny.*

Ponadto rozkład π jest zadany wzorem

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x T_x},$$

gdzie $\mathbb{E}_x T_x$ oznacza wartość oczekiwaną liczby kroków, po których spacer losowy powróci do punktu startu x.

Dzięki równaniu (2.1) można efektywnie wyznaczyć π.

Przykład 2.3. Proste spacery losowe na grafach. Grafem prostym $G = (V, E)$ nazywamy zbiór wierzchołków V wraz ze zbiorem nieskierowanych krawędzi

$$E \subset \{\{x, y\} : \ x, y \in V\}.$$

Ponadto piszemy $x \sim y$ jeżeli są one połączone krawędzią ($\{x, y\} \in E$). Stopniem wierzchołka $x \in V$ nazywamy liczbę jego sąsiadów i oznaczamy $\deg(x)$. **Na prostych grafach zawsze będziemy rozważali prosty spacer losowy** z prawdopodobieństwem przejścia

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(x)} & \text{jeżeli } y \sim x \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

Gdy proces znajduje się w wierzchołku x, to wybiera losowo (jednostajnie) jednego z jego sąsiadów i przechodzi do niego. Jeżeli graf jest spójny, to spacer jest nieredukowalny.

Łatwo jest wówczas wyznaczyć rozkład stacjonarny spaceru losowego. Mianowicie

$$\pi(y) = \frac{\deg(y)}{2|E|}$$

jest rozkładem stacjonarnym, gdyż

$$\sum_{y \in V} \pi(y) P(y, x) = \sum_{y \sim x} \frac{\deg(y)}{2|E|} \cdot \frac{1}{\deg(y)} = \frac{\deg(x)}{2|E|} = \pi(x).$$

Zauważmy, że jeżeli graf G jest d-regularny (każdy wierzchołek ma ten sam stopień równy d), to $2|E| = d|V|$ i rozkład **jednostajny** $\pi(x) = 1/|V|$ jest stacjonarny.

Jak pokazuje powyższy przykład, wyznaczenie rozkładu stacjonarnego nie jest trudne. Ważne jest natomiast inne pytanie: jak szybko proces zbiega do rozkładu stacjonarnego? Jak widzieliśmy w przykładzie (2.1) zdarza się, że proces po pewnym czasie ma wręcz rozkład stacjonarny, ale nieraz, mimo iż jest dowolnie blisko, nie osiąga go. Poniżej będziemy badać ten problem na przykładzie tasowania kart.

3. Tasowanie kart

Zajmiemy się teraz zagadnieniem tasowania kart. Chcemy znaleźć odpowiedź na pytanie: ile razy należy potasować talię n kart (zazwyczaj $n = 52$), aby uznać, że jest ona dobrze potasowana? Oczywiście odpowiedź zależy od metody, którą tasujemy karty. Zanim jednak przejdziemy do omówienia szczegółów, zastanówmy się co

to znaczy, że talia kart jest dobrze potasowana i dlaczego powinno nam zależeć na osiągnięciu tego stanu. 'Dobrze potasowana' talia kart, tzn. że niezależnie od początkowego ułożenia kart, każda jej permutacja jest jednakowo prawdopodobna. Talię n kart można ułożyć na $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ sposobów, tak więc chcemy, aby niezależnie od tego jak karty są początkowo ułożone, po wykonaniu tasowania prawdopobobieństwo każdej permutacji wynosiło $1/n!$. Taki stan jest trudny do uzyskania, w szczególności nie podamy dokładnej odpowiedzi. Podamy jednak przybliżone wyniki, liczbę tasowań po której talia jest bardzo blisko pożądanemu ułożeniu.

Jak tasowanie kart wygląda w praktyce? Odpowiedź jest zawarta w poniższej tabelce. Przedstawia ona doświadczenie wykonane pod koniec lat sześćdziesiątych. Przeanalizowano rozkłady kart, które otrzymał jeden z graczy (na pozycji S) podczas szeregu turniejów brydżowych. W pierwszej kolumnie są oczekiwane rozkłady, w drugiej rozkłady po tasowaniu przez komputer, a w trzeciej po tasowaniu przez człowieka. Jak widać trzecia kolumna wyraźnie odbiega od oczekiwań (nie przechodzi też typowych testów statystycznych). Zbyt często pojawią się zrównoważone rozkłady rąk.

Distribution of the 4 suits	Expected Frequencies	Actual Frequencies of Computer-dealt Hands	Actual Frequencies of Man-dealt Hands
4,4,3,2*	216	198	241
5,3,3,2	155	160	172
5,4,3,1	129	116	124
5,4,2,2	106	92	105
4,3,3,3	105	103	129
6,3,2,2	56	64	46
6,4,2,1	47	53	36
6,3,3,1	34	40	41
5,5,2,1	32	40	19
4,4,4,1	30	35	25
7,3,2,1 and others	90	99	62
	1,000	1,000	1,000

3.1. **Metody tasowania kart.** Istnieje wiele metod tasowania kart:

- Najbardziej powszechną metodą jest RIFFLE SHUFFLE. Metoda zazwyczaj używana jest do potasowania talii 52 kart. Osoba tasująca dzieli stos kart na dwa (w sposób losowy, ale stara się aby oba zbiory miały w przybliżeniu podobną liczbę kart). Następnie oba stosy kart są wspólnie 'przekartkowywane'. Trzymając je w obu rękach osoba tasująca opuszcza karty (liczba kart jest zmienna i też losowa) z obu stosów tak, aby karty 'wchodziły' pomiędzy siebie.
- Niektórzy używają tzw. metody OVERHAND SHUFFLE. Bierzemy talię kart do jednej ręki i po kilka kart przekładamy do drugiej ręki, zmieniając kolejność kolejnych bloków.

- Tasowanie kart metodą TOP-TO-RANDOM: bierzemy kartę z góry i wkładamy ją losowo (w sposób jednostajny) do talii, możliwych jest więc n pozycji. Powtarzając tę czynność odpowiednio wiele razy talia będzie potasowana.
- Losowe permutacje: losujemy dwie karty i zamieniamy je miejscami.
- ...

W każdym z przykładów na pierwszy rzut oka nie widać nawet jaki powinien być rząd liczby tasowań. Odpowiedzi są dosyć zaskakujące:

- RIFFLE SHUFFLE: Według artykułu w New York Times: *In shuffling cards, 7 is winning number*[1]. Przedyskutujemy ten wynik poniżej.
- OVERHAND SHUFFLE: 2500 tasowań!
- TOP-TO-RANDOM: kilkaset tasowań, poniżej podamy przybliżony wynik;
- losowe permutacje: również kilkaset tasowań.

Poniżej omówimy TOP-TO-RANDOM oraz RIFFLE SHUFFLE.

3.2. **Tasowanie kart, a spacery losowe.** Zauważmy, że tasowanie kart jest szczególnym przypadkiem spaceru losowego na bardzo dużym grafie. Załóżmy, że karty są ponumerowane kolejnymi liczbami od 1 do n. Aktualne ułożenie kart jest pewną permutacją tych liczb, czyli punktem X_0, z którego startuje proces losowy. Wykonując jedno tasowanie (dowolną metodą) losujemy pewną permutację σ i liczymy $X_1 = \sigma(X_0)$. Tak więc wierzchołkami grafu jest zbiór permutacji zbioru n-elementowego (jest ich $n!$). Dwa wierzchołki grafu y, x są połączone krawędzią (tzn. w jednym kroku możemy przejść z dodatnim prawdopobobieństwem z y do x), jeżeli w dana metoda tasowania zawiera permutację σ taką, że $\sigma(y) = x$. W szczególności struktura grafu zależy od metody tasowania. Np. w metodzie TOP-TO-RANDOM możemy wylosować tylko permutację, która polega na zamianie pierwszej liczby z k-tą.

W każdej z metod losujemy więc zbiór permutacji $\sigma_1, \ldots, \sigma_M$, każdą z prawdopodobieństwem p_i, więc $P(y, x) = p_i$, gdy $x = \sigma_i(y)$. Zauważmy, że (niezależnie od metody tasowania) rozkład jednostajny jest rozkładem stacjonarnym, tzn $\pi(x) = 1/n!$ dla każdego $x \in V$:

$$\sum_{y:y\to x} P(y,x)\pi(y) = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{M} P(\sigma_i^{-1}(x), x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{M} p_i = \frac{1}{n!} = \pi(x).$$

3.3. **Tasowanie kart - TOP-TO-RANDOM.** Przypomnijmy, że w metodzie TOP-TO-RANDOM, bierzemy kartę z góry i wkładamy ją losowo (w sposób jednostajny) do talii, możliwych jest więc n pozycji. W języku spacerów losowych, w każdym kroku losujemy permutację σ, która zamienia miejscami 1 i k (dla $k = 1, \ldots, n$), a pozostałe miejsca pozostają bez zmian. Takich permutacji jest n i każdą z nich losujemy z prawdopobobieństwem $1/n$. Powtarzając tę czynność odpowiednio wiele razy, talia zostanie potasowana.

Kiedy możemy uznać, że talia jest potasowana? Odpowiedź ukryta jest w czasie losowym T_{top} - jest to pierwszy moment, gdy karta, która początkowo była na spodzie talii, oznaczmy ją przez A, znalazła się na jej górze i jest wkładana losowo do talii. Jest to szczególny przypadek następującego wyniku:

[1] http://www.nytimes.com/1990/01/09/science/in-shuffling-cards-7-is-winning-number.html

Lemat 3.1. *Jeżeli w chwili t jest k kart pod A, kartą która początkowo była na dole, to wszystkie $k!$ uporządkowań jest jednakowo prawdopodobne. W szczególności w chwili T_{top} talia kart jest dobrze potasowana.*

Dowód. Zastosujemy dowód przez indukcję. Dla $t = 0$ nie ma kart pod A więc teza jest oczywista. Załóżmy, że teza zachodzi dla t. W chwili $t+1$ możliwe są 2 przypadki:

- karta z wierzchołka umieszczana jest nad A. Wówczas ułożenie kart pod A się nie zmienia.
- karta z wierzchołka umieszczana jest pod A. Wtedy każda z $k+1$ lokalizacji pod A jest jednakowo prawdopodobna. Zatem wszystkie ułożenia $k+1$ kart, które są pod A są jednakowo prawdopodobne.

□

Lemat 3.2. *Mamy*

$$\mathbb{E}T_{\text{top}} \sim n \log n$$

Dowód. Ponownie rozpatrzymy zmiany pozycji karty A, która początkowo znajdowała się na dole talii. Opiszmy jej kolejne ruchy. Zauważmy, że jeżeli karta ta znajduje się na samym dole, to prawdopobobieństwo, że aktualnie wkładana karta znajdzie się pod A wynosi $1/n$. Niech T_1 oznacza więc moment, gdy pod A pojawi się pierwsza karta. Wówczas T_1 ma rozkład geometryczny z prawdopobobieństwem sukcesu $1/n$, tzn.

$$\mathbb{P}[T_1 = k] = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{n}\,.$$

Podobnie, gdy pod A znajduje się już $k-1$ kart, niech T_k oznacza czas przebywania karty A na tej pozycji. Ponownie rozkład tej zmiennej losowej jest geometryczny, tym razem z prawdopobobieństwem sukcesu k/n. Zauważmy, że $T_{\text{top}} = T_1 + \cdots T_n$ i T_{top} ma taki sam rozkład jak w zadaniu o kolekcjonerze kuponów. Lemat wynika więc z zadania **8**. □

W momencie T_{top} karty są już dobrze potasowane i w kolejnych krokach ich rozkład pozostaje jednostajny. Dla $n = 52$, $n \log n \approx 205$.

3.4. **Tasowanie kart -** Riffle Shuffle**.** W tym rozdziale zastanowimy się ile razy należy wykonać tasowanie metodą Riffle Shuffle, aby uznać, że talia n kart jest dobrze potasowana. W tym celu należy stworzyć model matematyczny, który opisuje to tasowanie. Podamy trzy możliwe modele zaproponowane przez Gilberta, Shannona, Reedsa.

Są one oparte są na zmiennej losowej o rozkładzie dwumianowym z parametrami n, $1/2$. Jest to zmienna losowa X taka, że

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Wygodniej jest myśleć, że X oznacza liczbę orłów w n-krotnym rzucie monetą. Wówczas z bardzo dużym prawdopobobieństwem X przyjmuje wartości bliskie $n/2$.

Zaproponowane modele:

(1) Losujemy liczbę całkowitą X ze zbioru $1, \ldots, n$. Wybieramy ją tak, aby miała rozkład dwumianowy z parametrami n, $1/2$. Dzielimy karty na dwa stosy: górne X kart tworzy pierwszy z nich, a pozostałe $n - X$ drugi. Następnie wykonujemy tasowanie, musimy więc zmieszać oba zbiory zachowując jednak uporządkowanie wewnątrz nich. Możemy to zrobić na $\binom{n}{X}$ sposobów, tzn. na n pozycjach wybieramy X miejsc, gdzie umieszczamy pierwszy stos (możemy to zrobić tylko na jeden sposób, gdyż musimy zachować jego uporządkowanie), a na pozostałe $n-X$ miejsc wkładamy pozostałe karty. Każde takie tasowanie wybieramy losowo w sposób jednostajny.

(2) Niech X będzie liczbą losową jak wyżej, tzn. zmienną losową o rozkładzie dwumianowym z parametrami $n, 1/2$. Dzielimy karty na dwa stosy: górne X kart tworzy pierwszy z nich, a pozostałe $n-X$ drugi. Następnie wykonujemy tasowanie. Bierzemy jeden stos do lewej ręki, drugi do prawej. Upuszczamy kolejno karty, losowo, z lewej lub prawej ręki z prawdopobobieństwem proporcjonalnym do rozmiaru zbioru. To znaczy, jeżeli w lewej ręce pozostało nam L kart, a w prawej P kart, to kartę z lewej ręki upuszczamy z prawdopobobieństwem $L/(L+P)$, a z prawej z prawdopobobieństwem $P/(L+P)$. Powtarzamy tę czynność tak długo, aż upuścimy wszystkie karty.

(3) (Tasowanie odwrotne). Opiszemy jak wykonać czynność odwrotną do Riffle Shuffle. Oznaczmy tył każdej karty przez 0 lub 1 w zależności od wyniku rzutu monetą (dla każdej karty wykonujemy niezależnie rzut). Wyjmijmy z talii wszystkie karty oznaczone zerem i połóżmy je na górze talii, zachowując ich uporządkowanie.

Lemat 3.3. *Powyższe opisy (1), (2) i (3) są równoważne, tzn. wygenerowana permutacja ma ten sam rozkład.*

Dowód. Modele (1) i (3) są równoważne. Istotnie, zauważmy, że liczba zer ma rozkład dwumianowy z parametrami $n, 1/2$. Ponadto każdy rozkład zer jest jednakowo prawdopodobny.

Modele (1) i (2) są równoważne. Oznaczmy przez $L_1, \ldots L_k$ karty z pierwszego stosu, a przez $P_1, \ldots, P_{n-k}$ karty z drugiego stosu. Obliczmy prawdopobobieństwo wylosowania konkretnej permutacji, np. $L_1 L_2 P_1 L_3 P_2 \ldots P_{n-k} L_k$:

$$\frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-k-1} \cdot \frac{n-k}{n-k-2} \cdot \frac{k-2}{n-k-3} \cdot \frac{(n-k)-1}{n-k-4} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Dla każdej permutacji otrzymujemy ten sam wynik, więc każde ułożenie kart jest jednakowo prawdopodobne. □

Okazuje się, że zamiast badać tasowanie Riffle Shuffle wystarczy patrzyć na tasowanie odwrotne i odpowiedzieć na to samo pytanie, ale w terminach właśnie tasowania odwrotnego. Badając odległość pomiędzy μ_n, a rozkładem stacjonarnym wprowadza się odległość pomiędzy rozkładami

$$\|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}} = \frac{1}{2} \sum_{x \in V} |\mu(x) - \nu(x)|, \tag{3.4}$$

nazywaną normą całkowitego wahania. Możemy myśleć, że jest to inny sposób mierzenia odległości pomiędzy wektorami. Badany przez nas problem sprowadza się, do odpowiedzi na pytanie po ilu krokach powyższa odległość jest mała, tzn. jego rozkład jest bliski stacjonarnemu. Przyjmuje się, że 'mała' oznacza, że powyższa odległość jest mniejsza niż 1/4. Zachodzi następujący lemat:

Lemat 3.5. *Dla dowolnej metody tasowania kart odległość pomiędzy tasowaniem, a rozkładem jednostajnym jest równa odległości pomiędzy tasowaniem odwrotnym, a rozkładem jednostajnym.*

Dowód. Pokażemy, że w pierwszych krokach odległości są identyczne. Ogólnie ten sam dowód działa. Niech x_0 oznacza początkowe ułożenie kart. Oznaczmy przez $\mu_1(y)$ prawdopobobieństwo, że po pierwszym tasowaniu otrzymamy permutację y, a przez $\mu_1^{-1}(y)$ prawdopobobieństwo, że po pierwszym odwrotnym tasowaniu otrzymamy permutację y. Oznaczmy przez M liczbę permutaji, które można uzyskać w jednym tasowaniu. Mamy

$$\begin{aligned}
\|\mu_1 - \pi\|_{\mathrm{TV}} &= \frac{1}{2}\sum_{y\in V}\big|\mu_1(y) - \pi(y)\big| \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\big|\mathbb{P}[\sigma_j(x_0) = y] - 1/n!\big| + \frac{n! - M}{n!} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\big|p_j - 1/n!\big| + \frac{n! - M}{n!} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j}\big|\mathbb{P}[\sigma_j^{-1}(x_0) = y] - 1/n!\big| + \frac{n! - M}{n!} \\
&= \|\mu_1^{-1} - \pi\|_{\mathrm{TV}}
\end{aligned}$$

□

Wykonujemy kolejne tasowania odwrotne. Tworzymy tablicę, której rzędy są numerowane kartami, a kolumny odpowiadają kolejnym tasowaniom. Należy myśleć, że każda karta ma na stałe przyporządkowany jeden z wierszy. Elementami tablicy są 0 i 1. W pierwszej kolumnie zapisujemy liczbę przyporządkowaną danej karcie w pierwszym odwrotnym tasowaniu. Czynność powtarzamy, tzn. w drugiej kolumnie zapisujemy wynik przyporządkowany w drugim tasowaniu itd.

Lemat 3.6. *Niech T_{RS} oznacza pierwszy czas, w którym tablica binarna opisana powyżej zawiera parami różne rzędy. W chwili T_{RS} karty są dobrze potasowane.*

Dowód. Po pierwszym tasowaniu karty, które mają 0 są przeniesione na górę, a karty z 1 na dół. Po drugim losowaniu na górę przenoszone są karty, które mają 0 w drugiej kolumnie, ale zachowując ich wcześniejsze uporządkowanie. Tak więc na samej górze są karty, które w dwóch pierwszych wierszach mają 00, potem 10, 01,11. Po trzecim losowaniu kolejno: 000, 100,010, 110,001,101,011,111, itd. W poszczególnych grupach karty zachowują jednak swoje początkowe uporządkowanie. Zauważmy, że odwrotne tasowanie sortuje wg odwrotnego porządku leksykograficznego.

W momencie T_{RS} wszystkim kartom zostały przyporządkowane **różne** wektory o długości T_{RS}. Więc zostały one posortowane w sposób losowy niezależnie od ich początkowego ułożenia. Jednocześnie, ponieważ przyporządkowanie karcie każdego wektora ma takie samo prawdopodobieństwo, każda ich permutacja jest jednakowo prawdopodobna. □

Chcemy więc oszacować wartość T_{RS}. Zanim zaczniemy liczyć, zastanówmy się czego należy oczekiwać. Dla $n = 52$ chcemy oszacować po ilu losowaniach kartom zostaną przyporządkowane różne losowe wektory. Zauważmy:

- po 5 krokach mamy do dyspozycji jedynie $2^5 = 32$ wektory 0-1. Na pewno więc jest to za mało kroków, aby rozdzielić karty.
- po 6 krokach: $2^6 = 64$ jest to jedynie o 8 więcej niż 52, więc również za mało, aby potasować karty.
- dla większych wartości mamy: $2^7 = 128, \ldots, 2^{11} = 2048$, widzimy więc, że każde kolejne tasowanie znacznie zwiększa szanse potasowania kart.

Obliczymy wartość $\mathbb{P}[T_{\mathrm{RS}} \leq t]$. W czasie t każdej z kart przyporządkowano losowy wektor 0-1 o długości t i chcemy policzyć prawdopobobieństwo, że wektory te są parami różne. Jest to dokładnie problem urodzin: oblicz prawdopobobieństwo, że w grupie n osób nie ma dwóch osób obchodzących urodziny tego samego dnia. Mamy

$$\mathbb{P}[T_{\mathrm{RS}} \leq t] = \prod_{i=1}^{n-1} \Big(1 - \frac{i}{2^t}\Big).$$

Powyższa formułka jest niewygodna w obliczeniach. Można ją uprościć, ale można też próbować, przy pomocy prostego programu, ją obliczyć. I tak dla $n = 52$ otrzymujemy

t	7	8	9	10	11	12	13
$\mathbb{P}[T_{\mathrm{RS}} \leq t]$	~ 0	$0,003$	$0,06$	$0,25$	$0,50$	$0,71$	$0,84$

Podobnie można oszacować wartość oczekiwaną i otrzymujemy, że jest ona liczbą nieco większą niż 11.

Skąd więc wzięła się wartość 7? W praktyce nie musimy otrzymać idealnie potasowanej talii kart, ale wystarczy je dobrze potasować, tak aby była bliska rozkładowi jednostajnemu. Bliska w sensie odległości zdefiniowanej w (3.4). W kolejnych krokach zmniejsza się ona i jeżeli jest odpowiednio blisko 0, to przyjmuje się, że karty są potasowane.

Bayer i Diaconis dokładnie wyliczyli tę odległość. Nie będziemy formułować ich wyniku (to właśnie jego dotyczył artykuł w New York Times), ale podamy odległości, które otrzymali dla $n = 52$

t	4	5	6	7	8	9	10
$\|\mu_t - U\|_{\mathrm{TV}}$	$1,00$	$0,92$	$0,61$	$0,33$	$0,16$	$0,08$	$0,04$

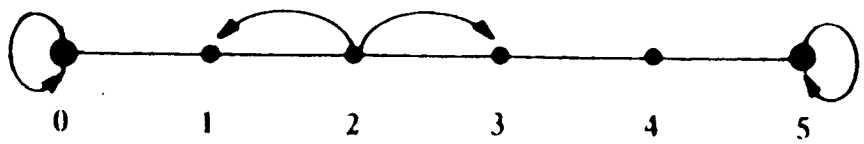
Zauważmy, że dla wartości 4,5,6 odległość jest duża, a potem zaczyna gwałtownie spadać. Z każdym kolejnym krokiem zmniejsza się dwukrotnie. Przyjmuje się, że **7 tasowań wystarczy** do potasowania talii 52 kart. W rzeczywistości warto wykonać jednak 1-2 dodatkowe tasowania.

7 tasowań nie wystarczy. Wykonano następujące doświadczenie. Załóżmy, że karty są ponumerowane $R1, \ldots, R26, B1, \ldots, B26$ oraz ułożone są w talii w następującej kolejności $R1, R2, \ldots, R26, B26, B25, \ldots, B1$. Czerwone karty są więc w kolejności rosnącej, a czarne malejącej. Wykonajmy 7 razy tasowanie metodą RIFFLE SHUFFLE. Następnie po kolei przeglądamy karty. Jeżeli napotkamy na kartę $R1$ kładziemy ją na stos R, jeżeli $B1$, na stos B. Jeżeli wyciągnięta karta ma numer o jeden większy niż odkryta karta w jej kolorze, to kładziemy ją na odpowiedni stos, w przeciwnym razie odkładamy ją na dół talii. Kończymy grę, gdy jeden ze stosów jest pełny, tzn. składa się z 26 kart. Powiedzmy, że wygraliśmy grę, jeżeli pełny jest stos R. Gdyby karty zostały dobrze potasowane, to prawdopobobieństwo wygrania wynosiłoby 1/2. Tymczasem okazuje się (poprzez komputerowe symulacje), że wygrywamy w 81%.

4. Spacery losowe, funkcje harmoniczne i sieci elektryczne

4.1. Przykłady.

Przykład 4.1. Przypomnijmy problem ruiny. Gracz startuje z kapitałem k. W każdej rundzie rzuca monetą, jeżeli wypadnie orzeł wygrywa 1, w przeciwnym razie traci 1. Gracz kończy grę, gdy jego kapitał osiągnie poziom n lub zbankrutuje. Chcemy poznać prawdopobobieństwo, że gra zakończy się sukcesem gracza, a więc



RYSUNEK 1. Problem ruiny jako spacer losowy na grafie

obliczyć prawdopobobieństwo p_k, że startując w punkcie k odwiedzimy wierzchołek n przed wierzchołkiem 0 (Rysunek 1). W tym celu zauważmy, że

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} \qquad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ p_0 &= 0 \\ p_n &= 1 \end{aligned}$$

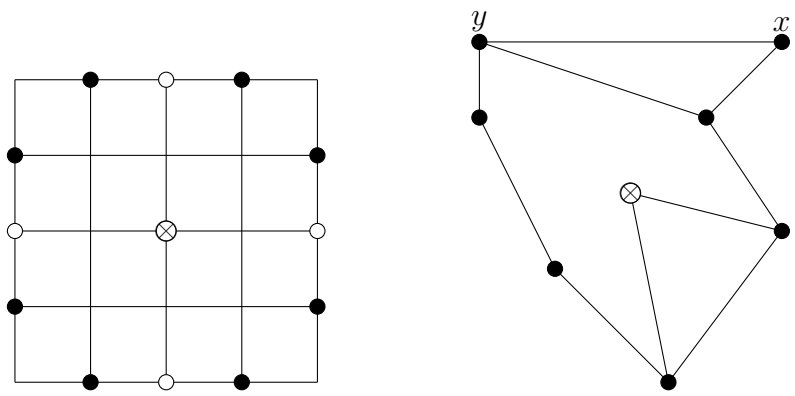
Następnie pokazuje się, że ten układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie $p_k = \frac{k}{n}$.

Przykład 4.2. Popatrzmy na fragment mapy NY na Rysunku 2. Wewnątrz znajduje się przestępca, który próbuje uciec przed obławą policji. Policja obstawiła tylko niektóre z dróg ucieczek oznaczone przez $\bullet$. Jeżeli uciekinier, który porusza się w sposób losowy, dotrze do jednego z punktów $\circ$ będzie wolny. Chcemy obliczyć prawdopobobieństwo, że uda mu się uciec, jeżeli startuje z punktu $\otimes$. Wprowadzamy układ

współrzędnych tak, aby $\otimes = (0,0)$ i piszemy układ równań

$$\begin{aligned} p_{i,j} &= \frac{1}{4}\big(p_{i-1,j} + p_{i,j-1} + p_{i+1,j} + p_{i,j+1}\big) \qquad \text{dla } i,j = \dots \\ p_\bullet &= 0 \\ p_\circ &= 1 \end{aligned}$$

Powyższy układ można rozwiązać, choć wymaga to sporo pracy. Obliczenia ułatwia obserwacja, że ze względu na symetrię $p_{1,0} = p_{0,1} = p_{-1,0} = p_{0,-1}$, $p_{1,1} = p_{1,-1} = p_{-1,1} = p_{-1,-1}$ (a nawet $p_\otimes = p_{1,0}$).



Rysunek 2. Od lewej: mapa Nowego Yorku i przykład grafu spójnego

Przykład 4.3. Rozważmy jeszcze ogólniejszy przykład, jakim jest dowolny **graf** G. Jest to zbiór wierzchołków V (ang. vertices) oraz zbiór krawędzi E (ang. edges) - par wierzchołków. Na grafie możemy rozważać spacer losowy. Zaczynamy w dowolnym wierzchołku i przechodzimy w sposób losowy do jednego z jego sąsiadów (zazwyczaj do każdego z sąsiadów będziemy przechodzić z takim samym prawdopodobieństwem). Powtarzamy tę czynność wielokrotnie. Załóżmy, że startujemy w punkcie $\otimes$, jak na Rysunku 2. Jakie jest prawdopodobieństwo dojścia do punktu x przed dotarciem do punktu y?

4.2. **Funkcje harmoniczne.** Zakładamy, że mamy dany graf $G = (V, E)$ z prawdopobobieństwem przejścia $P(x, y)$ (jest to prawdopobobieństwo, że będąc w x przejdziemy do jego sąsiada y). Zawsze zakładać będziemy, że graf G jest **spójny**, czyli taki, w którym dla dowolnych wierzchołków v_1, $v_2 \in V$ istnieje ścieżka wzdłuż krawędzi w E łącząca v_1 z v_2. Zbiór wierzchołków E dzielimy na wnętrze D oraz brzeg B tak, aby

- zbiory D i B były rozłączne;
- dla każdego punktu z B co najmniej jeden z jego sąsiadów jest w D.

Definicja 4.1. Funkcja f jest harmoniczna na D jeżeli dla każdego $x \in D$ (uwaga na znak sumy)

$$f(x) = \sum_{y:x\to y} P(x,y)f(y).$$

Chcemy znaleźć funkcję f taką, że f jest harmoniczna na D, znając jej wartości na B. Jako jedną z motywacji mogą posłużyć Przykłady 4.1 oraz 4.2.

Przykład 4.4. Zauważmy, że prawdopodobieństwo z Przykładu 4.1 jest funkcją harmoniczną. Przyjmując $B = \{0, n\}$, $D = \{1, \ldots, n-1\}$, $f(0) = 0$, $f(n) = 1$. Znalezione w tym przykładzie prawdopodobieństwo p_k jest szukaną przez nas funkcją harmoniczną $f(k) = p_k = \frac{k}{n}$. Jak wyglądają odpowiadające zbiory D, B i warunki brzegowe w przypadku Przykładu 4.2?

Następny przykład pokazuje, dlaczego funkcje harmoniczne są dla nas naturalnym i pomocnym obiektem.

Przykład 4.5. Załóżmy, że w grafie $G = (V, E)$, brzeg $B \subset V$ jest podzielony na dwa rozłączne zbiory N oraz M. Niech p_x oznacza prawdopodobieństwo, że startując z punktu $x \in V$ odwiedzimy zbiór M przed odwiedzeniem zbioru N. Niezależnie od struktury grafu G, $p_x = 1$ dla $x \in M$ oraz $p_x = 0$ dla $x \in N$. Dodatkowo dla $x \in D$ mamy

$$p_x = \sum_{y:x \to y} P(x, y) p_y.$$

Oznacza to, że funkcja $f(x) = p_x$ jest funkcją harmoniczną na D, przy warunkach brzegowych $f(x) = 1$ dla $x \in M$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \in N$.

Przy użyciu powyższego przykładu jesteśmy w stanie rozwiązać zagadnienie istnienia funkcji harmonicznej.

Lemat 4.1. *Niech warunki brzegowe będą zadane przez funkcję $f_0 \colon B \to \mathbb{R}$. Wówczas istnieje funkcja $f \colon V \to \mathbb{R}$, harmoniczna na D spełniająca zadane warunki brzegowe, czyli $f(b) = f_0(b)$ dla $b \in B$.*

Dowód. **Krok 1.** Lemat został już udowodniony w Przykładzie 4.5 dla bardzo szczególnego przypadku. Mianowicie, gdy funkcja brzegowa f_0 jest niezerowa w jednym punkcie, tzn. jeżeli $f_0(b_1) = 1$, a $f_0(b) = 0$ dla pozostałych b, to funkcja

$$f(x) = p_x(b_1),$$

jest funkcją harmoniczną, gdzie $p_x(b_1)$ oznacza prawdopobobieństwo, że startując z $x \in V$ pierwszym punktem brzegowym, który odwiedzimy będzie punkt b_1.

Krok 2. Funkcja harmoniczna pomnożona przez dowolną liczbę a_1 pozostaje funkcją harmoniczną. Zatem jeżeli $f_0(b_1) = a_1$, a $f_0(b) = 0$ dla pozostałych b, to funkcja

$$f(x) = a_1 \cdot p_x(b_1),$$

jest funkcją harmoniczną, która na brzegu B zgadza się z f_0.

Krok 3. Suma funkcji harmonicznych też jest funkcją harmoniczną. Tak więc dla $f_0(b_1) = a_1$, $f_0(b_2) = a_2$, a $f_0(b) = 0$ dla pozostałych b, funkcja

$$f(x) = a_1 \cdot p_x(b_1) + a_2 \cdot p_x(b_2),$$

jest funkcją harmoniczną, która na brzegu B zgadza się z f_0, ponieważ $p_{b_1}(b_2) = p_{b_2}(b_1) = 0$.

Krok 4. Widać więc jak skonstruować funkcję harmoniczną dla dowolnej funkcji f_0. Należy przyjąć

$$f(x) = \sum_{b \in B} f_0(b) \cdot p_x(b).$$

Dla porządku sprawdźmy, że jest to szukana funkcja. Spełniony jest warunek brzegowy, bo dla $x \in B$

$$f(x) = \sum_{b \in B} f_0(b) p_x(b) = f_0(x) + \sum_{b \neq x} f_0(b) p_x(b) = f_0(x).$$

Natomiast dla $x \in D$

$$\begin{aligned} \sum_{y:x \to y} P(x,y) f(y) &= \sum_{y:x \to y} P(x,y) \sum_{b \in B} f_0(b) p_y(b) \\ &= \sum_{b \in B} f_0(b) \sum_{y:x \to y} P(x,y) p_y(b) = \sum_{b \in B} f_0(z) p_x(b) = f(x). \end{aligned}$$

Funkcja f zdefiniowana powyżej ma następującą interpretację probabilistyczną. Wypuszczamy cząsteczkę z punktu x i pozwalamy jej na losowy spacer po grafie aż do momentu, kiedy uderzy w jeden z punktów brzegu B. Załóżmy, że cząsteczka trafiła w punkt brzegu $b_x \in B$. W tym momencie punkt b_x jest losowy. Jako wartość $f(x)$ przyjmujemy średnią wartość $f_0(b_x)$, inaczej wartość oczekiwaną $\mathbb{E}[f_0(b_x)]$:

$$f(x) = \mathbb{E}[f_0(b_x)] = \sum_{b \in B} f_0(b) \cdot p_x(b).$$

□

Wiemy, że funkcja harmoniczna zawsze istnieje. Czy jest ona jedyna? Pokażemy, że w istocie tak jest przy użyciu zasady maksimum.

Lemat 4.2 (Zasada maksimum)**.** *Jeżeli f jest harmoniczna na D, to przyjmuje ona swoje maksimum na brzegu B.*

Dowód. Pokażemy, że jeżeli f przyjmuje maksymalną wartość M w obszarze D, to f musi być stała i równa M na $D \cup B$. Załóżmy, że

$$f(x) = M \quad \text{dla pewnego } x \in D.$$

Wtedy

$$M = f(x) = \sum_{y:x \to y} P(x,y) f(y),$$

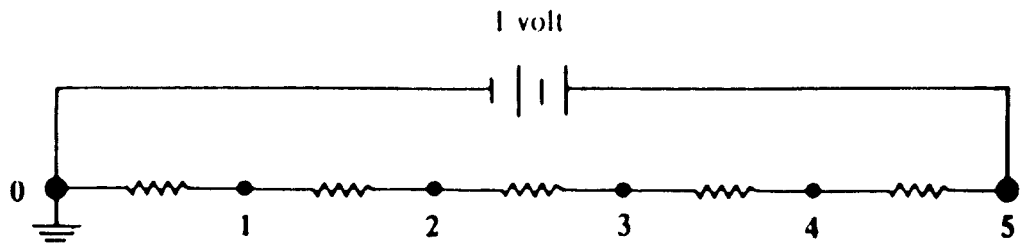
a ponieważ $f(y) \leq M$ oraz $\sum_{y:x \to y} P(x,y) = 1$ musi zachodzić $f(y) = M$ dla każdego sąsiada x. Kontynuujemy to rozumowanie, tym razem zamiast x biorąc dowolnego jego sąsiada i otrzymujemy, że dla wszystkich wierzchołków odległych od x o co najwyżej 2, funkcja f musi w nich przyjmować wartość M, itd. W ten sposób wypełniamy cały zbiór wierzchołków. □

Wniosek 4.3. *Istnieje dokładnie jedna funkcja harmoniczna f na D o zadanych wartościach na zbiorze B.*

Dowód. Wiemy, że zawsze istnieje funkcja harmoniczna na D. Załóżmy, że istnieją dwie takie funkcje f i g na D, które przyjmują te same wartości na zbiorze B. Wtedy funkcja $h = f - g$ jest harmoniczna na D, a na zbiorze B przyjmuje wartość 0. Z zasady maksimum $h \leq 0$ na D. Analogicznie pokazujemy, że $h \geq 0$ na D, więc $h \equiv 0$ oraz $f \equiv g$. □

4.3. **Sieci elektryczne.** Interesujące grafy mają zazwyczaj skomplikowaną strukturę i ciężko je analizować. Rozważanie dużych układów równań (czy też dużych macierzy) jest trudne. Można uprościć wiele problemów wykorzystując język sieci elektrycznych i stojącą za nim teorię.

Przykład 4.6. Załóżmy, że łączymy szeregowo n rezystorów (oporników), każdy o oporze jednostkowym i przykładamy napięcie do skrajnych wierzchołków. Przez



Rysunek 3. Oporniki połączone szeregowo

$v(k)$ oznaczymy napięcie w każdym z wierzchołków. Wiemy, że $v(0) = 0$, $v(n) = 1$. Chcemy obliczyć napięcie w każdym punkcie. W tym celu użyjemy

- **Prawo Ohma:** $i(x,y) = \frac{v(x)-v(y)}{R(x,y)}$ - natężenie prądu przechodzącego przez krawędź łączącą x i y, gdzie $R(x,y)$ jest oporem na danej krawędzi.
- **Prawo Kirchhoffa:** suma prądów wpływających do danego wierzchołka $x \neq 0, n$ jest równa sumie prądów z niego wypływających: $\sum_{y:y\sim x} i(x,y) = 0$.

W naszym przykładzie, $R(k, k+1) = 1$, więc

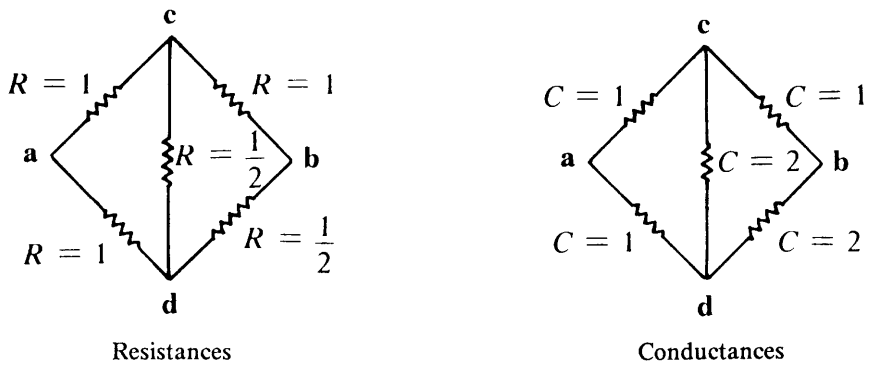
$$0 = \sum_{j:j\sim k} i(k,j) = i(k,k-1) + i(k,k+1) = (v(k) - v(k-1)) + (v(k) - v(k+1)).$$

Stąd

$$\begin{aligned} v(k) &= \frac{1}{2}v(k-1) + \frac{1}{2}v(k+1) \qquad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ v(0) &= 0 \\ v(1) &= 1 \end{aligned}$$

Porównując te równania z problem ruiny (Przykład 4.1) widzimy, że rozwiązanie to $v(k) = \frac{k}{n}$, ponieważ istnieje jedyna funkcja harmoniczna (Wniosek 4.3).

Przykład 4.7. Można budować dowolne układy elektryczne. Kolejny przykład sieci, z którą będziemy pracować przedstawiony jest na rysunku 4.

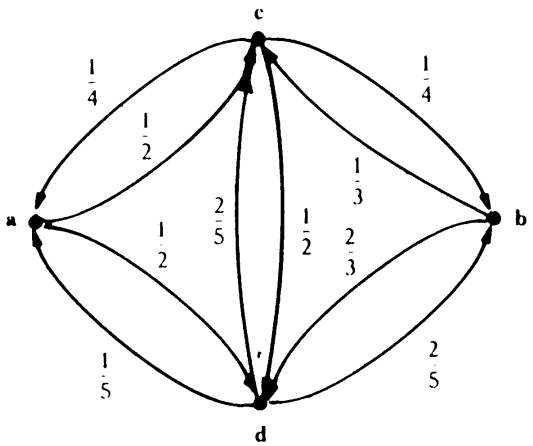


RYSUNEK 4. Przykład sieci elektrycznej. Po lewej zaznaczone są opory, po prawej przepustowości.

4.4. **Sieci elektryczne, a spacery losowe.** Mając dowolną sieć elektryczną, przez $R(x,y)$ oznaczamy opór (rezystancję), a przez $C(x,y) = 1/R(x,y)$ przepustowość. Możemy zdefiniować wówczas spacer losowy na grafie. Mianowicie będąc w danym wierzchołku x przechodzimy do jednego z jego sąsiadów z prawdopodobieństwem proporcjonalnym do przepustowości krawędzi ich łączącej:

$$P(x,y) = \frac{C(x,y)}{C(x)}, \qquad \text{gdzie} \qquad C(x) = \sum_{y:y\sim x} C(x,y).$$

Przykład 4.8. Tworząc spacer losowy z sieci z Przykładu 4.7 otrzymamy następujące prawdopodobieństwa przejść.



RYSUNEK 5. Spacer losowy otrzymany z sieci na Rysunku 4

4.5. **Spacery losowe, a sieci elektryczne.** Naturalne jest pytanie odwrotne. Czy mając zadany spacer losowy można zdefiniować równoważną sieć elektryczną? Okazuje się, że nie zawsze. Spacer losowy powinien spełniać dodatkowy warunek:

(4.4) rozkład stacjonarny π spełnia dla $x, y \in V$: $\pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x)$

Wówczas można zdefiniować przepustowość

$$C(x,y) = \pi(x)P(x,y)$$

Dzięki warunkowi (4.4) przepustowość jest symetryczna $C(x,y) = C(y,x)$.

Warunek (4.4) okazuje się być bardzo naturalny i jest spełniony przez wiele ważnych przykładów, np. prosty spacer losowy na grafie.

4.6. **Sieci elektryczne, a funkcje harmoniczne.** Oznaczmy przez a, b wierzchołki do których przykładamy napięcie. Wtedy dla $x \neq a, b$ z prawa Kirchhoffa mamy

$$\sum_{y:y\sim x} i(x,y) = 0$$

i z prawa Ohma

$$0 = \sum_{y:y\sim x} \frac{v(x)-v(y)}{R(x,y)} = \sum_{y:y\sim x} \big(v(x)-v(y)\big)C(x,y) = C(x)v(x) - \sum_{y:y\sim x} v(y)C(x,y).$$

Stąd

$$v(x) = \sum_{y:y\sim x} \frac{C(x,y)}{C(x)} v(y) = \sum_{y:y\sim x} P(x,y)v(y).$$

Zatem v jest funkcją harmoniczną z wartościami brzegowymi $v(a) = 1$, $v(b) = 0$. A ponieważ funkcja harmoniczna o zadanych wartościach brzegowych jest jedyna, porównując z Przykładem 4.5 widzimy, że $v(x)$ jest prawdopodobieństwem że zaczynając w punkcie x, trafimy w punkt a zanim trafimy w punkt b.

Przykład 4.9. Powracając do naszego przykładu roboczego widzimy, że v rozwiązuje układ równań

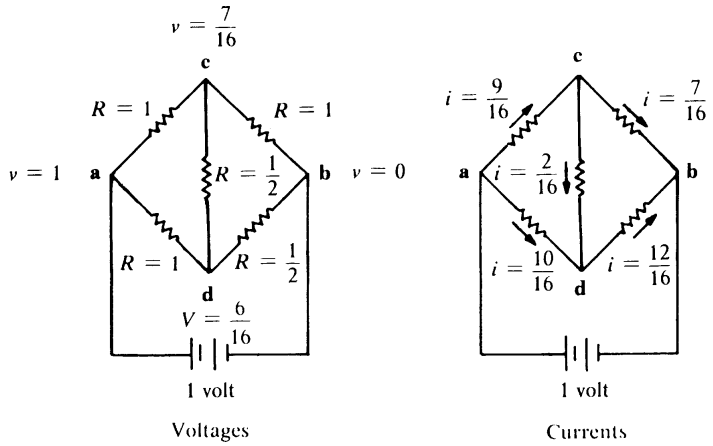
$$\begin{aligned} v(a) &= 1; \\ v(b) &= 0; \\ v(c) &= \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{2}v(d) + \frac{1}{4}\cdot 0 \\ v(d) &= \frac{1}{5}\cdot 1 + \frac{2}{5}v(c) + \frac{2}{5}\cdot 0. \end{aligned}$$

Stąd $v(c) = \frac{7}{16}$ i $v(d) = \frac{3}{8}$. Dzięki tym wartościom można policzyć przepływ prądu.

4.7. **Interpretacja probabilistyczna.** Rozważmy prąd wpływający do sieci $i(a)$. Mamy

$$\begin{aligned} i(a) &= \sum_{y:y\sim a} i(a,y) = \sum_{y:y\sim a} (1-v(y))C(a,y) \\ &= C(a)\Big(1 - \sum_{y:a\to y} P(a,y)v(y)\Big). \end{aligned}$$

Zauważmy, że $i(a)$ również możemy nadać interpretację probabilistyczną. Załóżmy, że spacer losowy startuje w punkcie a. Wówczas dla każdego y takiego, że $a \to y$



znajdzie się on w punkcie y z prawdopodobieństwem $P(a, y)$. Skoro $v(y)$ oznacza prawdopodobieństwo, że startując z y dojdziemy do a przed dojściem do b, to

$$\sum_{y:a\to y} P(a, y)v(y)$$

możemy interpretować jako prawdopodobieństwo powrotu do a przed odwiedzeniem b, jeżeli spacer losowy startował w punkcie a. W takim razie

$$p_{\text{escape}} = 1 - \sum_{y:a\to y} P(a, y)v(y)$$

jest prawdopodobieństwem, że startując w a dojdziemy do b przed ponownym powrotem do a. Prawdopodobieństwo p_{escape} nazywamy prawdopodobieństwem ucieczki z punktu a i z naszych obliczeń widzimy, że wyraża się ono w terminach sieci elektrycznej jako

$$p_{\text{escape}} = \frac{i(a)}{C(a)}.$$

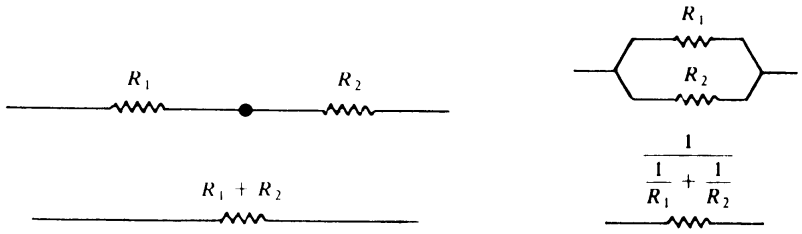
Definiujemy $C_{\text{eff}} = i(a)$ jako efektywną przepustowość układu, a $R_{\text{eff}} = 1/C_{\text{eff}} = 1/i(a)$ jest efektywną rezystancję.

Przykład 4.10. W naszym roboczym Przykładzie 4.7, $C(a) = 2$, $i(a) = \frac{19}{16}$, $C_{\text{eff}} = \frac{1}{R_{\text{eff}}} = \frac{i(a)}{v(a)} = \frac{19}{16}$ oraz $p_{\text{escape}} = \frac{19}{32}$.

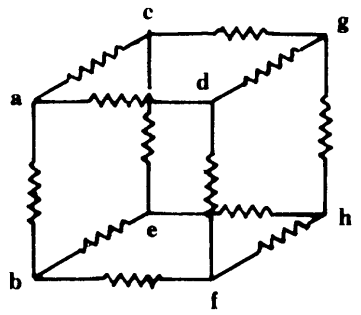
4.8. **Redukcja układów elektrycznych.** Wiele problemów można uprościć wykorzystując wzory na rezystancję zastępczą:

- W połączeniu szeregowym opór dwóch rezystorów jest równy sumie ich oporów: $R = R_1 + R_2$
- W połączeniu równoległym dwa rezystory możemy zastąpić jednym i opory spełniają $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, zatem $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

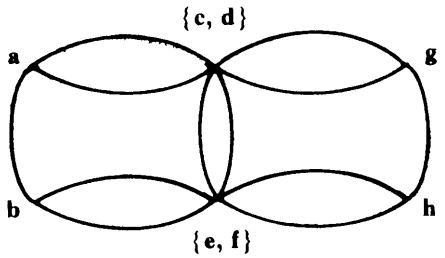
Przykład 4.11. Rozważmy szkielet sześcianu. Obliczymy prawdopobobieństwo, że spacer losowy startujący w punkcie a, najpierw dojdzie do b przed a. Rozważmy graf jako sieć elektryczną z jednostkowymi rezystorami na krawędziach. Podłączamy baterię do a i b tak, by $v(a) = 1$, $v(b) = 0$.



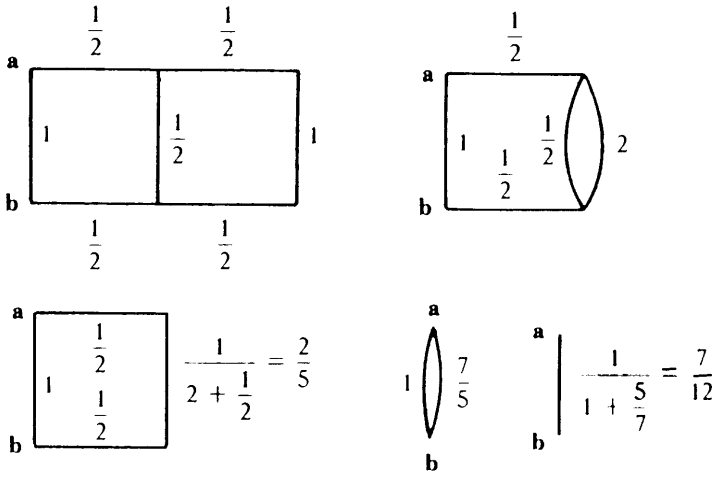
RYSUNEK 6. Połączenia rezystorów: szeregowe (po lewej) i równoległe (po prawej)



Z symetrii wynika, że $v(c) = v(d)$ oraz $v(e) = v(f)$. Możemy więc dołożyć krawędź pomiędzy tymi punktami. Nie popłynie przez nią prąd. Utożsamiamy te punkty ze sobą.



Redukujemy kolejno połączenia



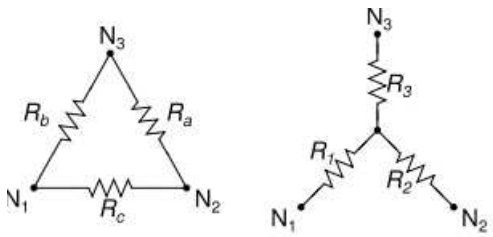
Ostatecznie

$$i(a) = \frac{12}{7}, \quad R_{\text{eff}} = \frac{7}{12}, \quad C_{\text{eff}} = \frac{12}{7}, \quad C(a) = 3, \quad p_{\text{escape}} = \frac{4}{7}.$$

Przykład 4.12. Używając języka sieci elektrycznych łatwo rozwiązać problem ruiny (Przykład 4.1). Wyjściowy graf redukuje się do grafu złożonego z trzech wierzchołków: $\{0, k, n\}$, gdzie $R(0, k) = k$, $R(k, n) = n - k$. Wystarczy policzyć

$$P(k, n) = \frac{C(k, n)}{C(k)} = \frac{\frac{1}{n-k}}{\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}} = \frac{k}{n}.$$

4.9. **Transformacja gwiazda - trójkąt.** Fizycy używają powszechnie jeszcze jednej transformacji pozwalającej uprościć sieć elektryczną, tzw. transfigurację gwiazda - trójkąt (ang. star - delta transformation).



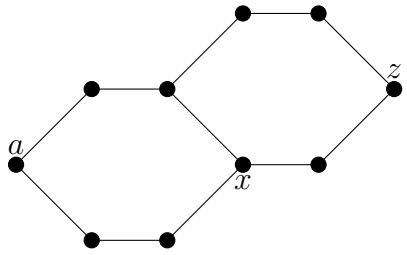
Obie konfiguracje gwiazdka i trójkąt są równoważne dla odpowiednio dobranych oporów. I tak, układ w kształcie trójkąta dla zadanych wartości R_a, R_b, R_c, możemy przekształcić na układ w kształcie gwiazdki z wartościami oporów:

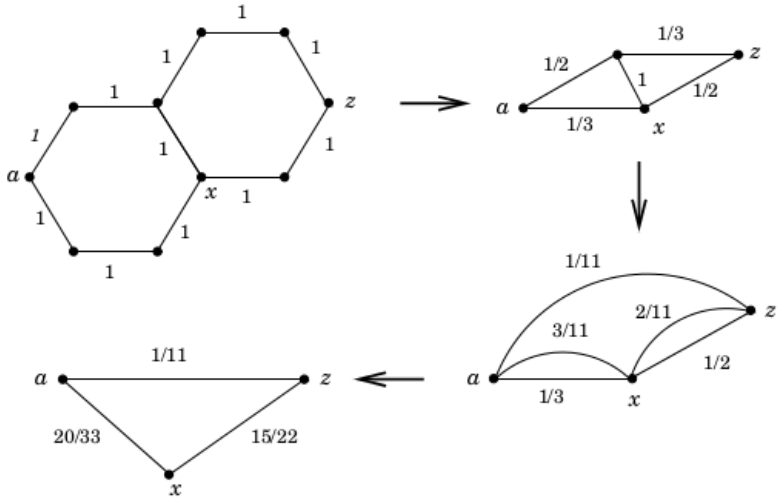
$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c},$$
$$R_2 = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c},$$
$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}.$$

Na odwrót układ gwiazdkę można przekształcić na trójkąt:

$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1},$$
$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2},$$
$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}.$$

Przykład 4.13. Rozważmy następujący graf. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zaczynając w punkcie x odwiedzimy punkt a przed odwiedzeniem punktu z? Stosując transfigurację gwiazdka jesteśmy w stanie zredukować graf.





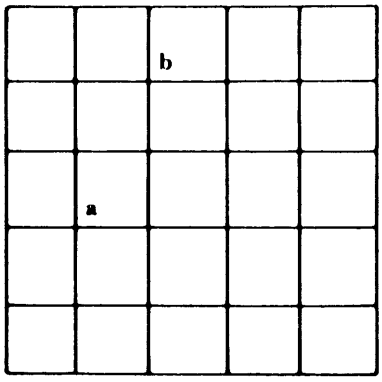
Ostatecznie szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\frac{20/33}{20/33 + 15/22} = \frac{8}{17}.$$

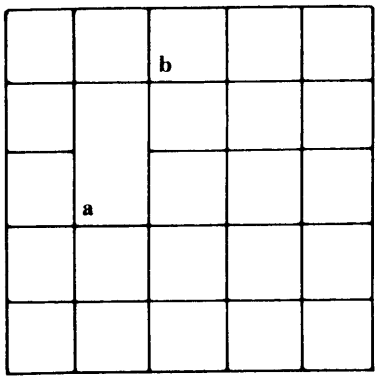
5. Prawo Rayleigh'a i twierdzenie Pólya

5.1. **Prawo Rayleigh'a.**

Przykład 5.1. Zacznijmy od następującego przykładu. Rozważmy spacer losowy po ulicach NY jak na poniższym rysunku



Niech p_{escape} będzie prawdopodobieństwem, że piechur startujący z a osiągnie b przed powrotem do a. Używając znanych nam już metod można obliczyć dokładną wartość p_{escape}. Załóżmy teraz, że jedna z ulic (niepołączona z a) została zablokowana.



Jak zmieni się p_{escape}? Intuicyjne wydaje się, że p_{escape} w nowym grafie zmaleje. Jest to jednak trudne do udowodnienia.

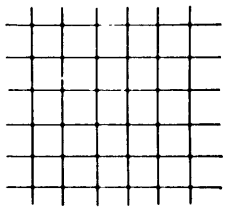
Posługując się językiem sieci elektrycznych możemy myśleć, że zamiast usuwać krawędź, zamieniamy rezystor na inny o nieskończonym oporze. Ta czynność powinna skutkować zwiększeniem R_{eff}, a więc zmniejszeniem p_{escape}. Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.1 (Prawo monotoniczności Rayleigh'a). *Jeżeli opory poszczególnych rezystorów rosną, to efektywna rezystancja R_{eff} pomiędzy dwoma punktami może jedynie wzrosnąć. Jeżeli opory maleją, to R_{eff} maleje.*

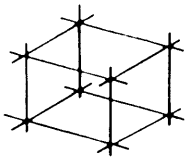
Powyższe twierdzenie z fizycznego punktu widzenia wydaje się być intuicyjne. Można je udowodnić używając czysto matematycznych metod, jednak dowód pominiemy, a zainteresowanych odsyłamy do książki Doyle, Snell [3].

5.2. **Rekurencyjność i tranzytywność.** Zajmiemy się teraz prostymi spacerami losowymi na kratach.

1-dimensional lattice



2-dimensional lattice

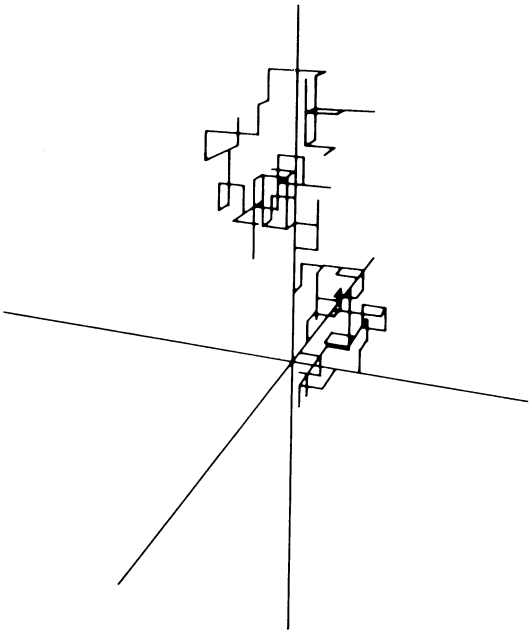


3-dimensional lattice

d-wymiarową kratę konstruuje się następująco. Jako zbiór wierzchołków przyjmujemy te punkty $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, których współrzędne są całkowite. Ten zbiór oznaczamy przez $\mathbb{Z}^d$ i łączymy krawędzią punkty, które różnią się na dokładnie jednej współrzędnej. W ten sposób każdy punkt ma $2d$ sąsiadów. Z prawdopodobieństwem

$1/2d$ przechodzimy do jednego z nich. Taki spacer nazywamy **prostym spacerem losowym**. Dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ długością $\mathbf{x}$ nazywamy liczbę $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_d|$. Jest to najmniejsza liczba kroków, które należy pokonać, aby przejść po kracie z $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ do $\mathbf{x}$.

Przykładowa trajektoria prostego spaceru losowego w trzech wymiarach wygląda następująco



W tym momencie można zadać kilka pytań:

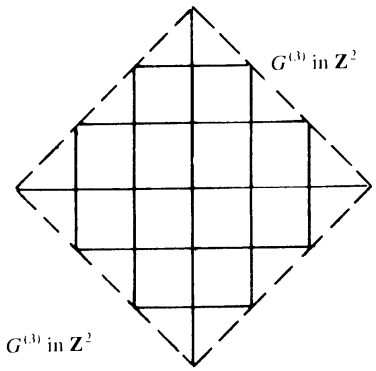
- czy wędrowiec startujący w punkcie $\mathbf{0}$ na pewno wróci do tego punktu?
- jeżeli wróci, to po jakim czasie?
- czy z prawdopodobieństwem 1 odwiedzi każdy punkt?

Okazuje się, że odpowiedzi na te pytania zależą od wymiaru przestrzeni. Jeżeli z prawdopodobieństwem 1 piechur wróci do punktu wyjścia, to spacer nazywamy **rekurencyjnym**. Jeżeli nie, tzn. z dodatnim prawdopodobieństwem nigdy nie wróci, to mówimy, że spacer jest **tranzytywny**. Można pokazać (i to zrobimy na ćwiczeniach), że spacer jest rekurencyjny, jeżeli każdy punkt jest odwiedzany nieskończenie wiele razy, a tranzytywny jeżeli każdy punkt jest odwiedzany skończenie wiele razy. Okazuje się, że zachodzi następujące, dość zaskakujące twierdzenie

Twierdzenie 5.2 (Poly'a). *Prosty spacer losowy na d-wymiarowej kracie jest rekurencyjny dla $d = 1, 2$, i tranzytywny dla $d \geq 3$.*

Ostatnia część wykładu będzie poświęcona dowodowi tego twierdzenia.

5.3. **Pomocniczy lemat.** Będziemy badać własności skończonych grafów, które będziemy powiększać, aż wypełnią całą kratę. Dla przykładu można wybrać kule. Niech G^r będzie kulą o promieniu r, tzn. zbiorem tych wierzchołków, których odległość od $\mathbf{0}$ jest co najwyżej r. Przez S^r oznaczymy sferę o promieniu r



W dwóch wymiarach jest to obrócony kwadrat, w trzech ośmiościan. Chcemy policzyć p^r_{escape} - prawdopobobieństwo ucieczki z G^r, czyli prawdopodobieństwo tego, że spacer opuści G^r przed powrotem do $\mathbf{0}$. Oczywiście p^r_{escape} maleje, gdy r rośnie. Oznaczmy przez p_{escape} graniczną wartość:

$$p_{\text{escape}} = \lim_{r\to\infty} p^r_{\text{escape}}.$$

Wówczas

Lemat 5.3. *Rozważmy prosty spacer losowy na $\mathbb{Z}^d$*

a) *Jeżeli $p_{\text{escape}} = 0$, to spacer losowy jest rekurencyjny.*
b) *Jeżeli $p_{\text{escape}} > 0$, to spacer losowy jest tranzytywny.*

Dowód. Niech X_n oznacza pozycję spaceru w czasie $n \in \mathbb{N}$. Wówczas, $X_0 = \mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ oraz przykładowo

$$\mathbb{P}[X_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)] = \mathbb{P}[X_1 = (0, 1, \ldots, 0)] = \ldots \mathbb{P}[X_1 = (0, \ldots, 0, 1)] = \frac{1}{2d}.$$

Rozważmy spacer zatrzymany w chwili powrotu do $\mathbf{0}$. W przypadku, gdy spacer nie powraca do $\mathbf{0}$, nie jest zatrzymywany i jest kontynuowany dowolnie długo. Oznaczmy przez τ (losowy) moment powrotu do $\mathbf{0}$, dokładniej

$$\tau = \min\{n \,|X_n = \mathbf{0}\},$$

które może przyjmować wartości $1, 2, 3, \ldots$ a także wartość ∞. Zauważmy, że $\mathbb{P}[\tau < \infty]$ jest prawdopodobieństwem powrotu do $\mathbf{0}$. Trajektorią $\mathbb{X}^\tau$ nazywać będziemy ciąg kolejnych punktów odwiedzonych przez spacer losowy do chwili τ, czyli

$$\mathbb{X}^\tau = (X_1, X_2, \ldots, X_{\tau-1}, X_\tau).$$

Rozważać będziemy największą odległość na jaką spacer oddali się od punktu startu $\mathbf{0}$, dokładniej

$$\|\mathbb{X}^\tau\| = \max_{1\le k\le\tau} \|X_k\|_1.$$

Wówczas

$$p_r = \mathbb{P}[\|\mathbb{X}^\tau\| \ge r].$$

Zauważmy, że jeżeli $\tau = \infty$, to może zdarzyć się, że $\|\mathbb{X}^\tau\| = \infty$. Natomiast jeżeli $\tau < \infty$, to wówczas $\|\mathbb{X}^\tau\| < \infty$. Oznacza to, że

$$\mathbb{P}[\tau < \infty] \le \mathbb{P}[\|\mathbb{X}^\tau\| < \infty].$$

Okazuje się, że te prawdopodobieństwa są sobie równe. Pokażemy, że $\mathbb{P}[\tau = \infty, \|\mathbb{X}^\tau\| < \infty] = 0$. Rzeczywiście

$$\mathbb{P}[\tau = \infty,\ \|\mathbb{X}^\tau\| < \infty] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[\tau = \infty, \|\mathbb{X}^\tau\| = n] = 0,$$

ponieważ $\mathbb{P}[\tau = \infty, \|\mathbb{X}^\tau\| = n] = 0$ dla każdego n (zadanie **13**). Skoro

$$\mathbb{P}[\|\mathbb{X}^\tau\| < \infty] = \mathbb{P}[\tau = \infty, \|\mathbb{X}^\tau\| < \infty] + \mathbb{P}[\tau < \infty, \|\mathbb{X}^\tau\| < \infty] = 0 + \mathbb{P}[\tau < \infty].$$

Zauważmy jeszcze, że

$$p_{\text{escape}} = \lim_{r\to\infty} p_r = \lim_{r\to\infty} \mathbb{P}[\|\mathbb{X}^\tau\| \geq r] = \mathbb{P}[\|\mathbb{X}^\tau\| = \infty] = \mathbb{P}[\tau = \infty].$$

Ostatecznie możemy zakończyć dowód twierdzenia:

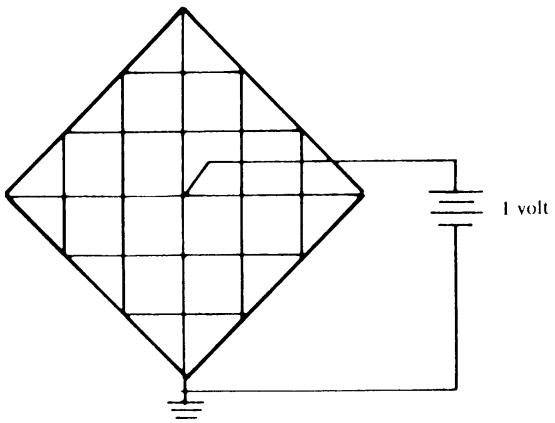
a) Załóżmy, że $p_{\text{escape}} = 0$, wówczas $\mathbb{P}[\tau = \infty] = 0$, więc z prawdopodobieństwem 1 spacer powraca do $\mathbf{0}$.
b) Jeżeli $p_{\text{escape}} > 0$ wówczas $\mathbb{P}[\tau = \infty] > 0$ Zatem prawdopodobieństwo, że spacer nie wróci do $\mathbf{0}$ jest dodatnie.

□

Przypomnijmy, że $p_{\text{escape}} = \frac{1}{C(a)R_{\text{eff}}}$, więc teza powyższego lematu zapisuje się następująco:

- Jeżeli $R_{\text{eff}} = \infty$, to spacer losowy jest rekurencyjny.
- Jeżeli $R_{\text{eff}} < \infty$, to spacer losowy jest tranzytywny.

Idea dowodu Twierdzenia 5.2 jest bardzo prosta. Będziemy chcieli oszacować R^r_{eff}, czyli efektywną rezystancję sieci powstałej z G^r. Skorzystamy z języka sieci elektrycznych, podłączymy baterię do $\mathbf{0}$ oraz sfery S^r.



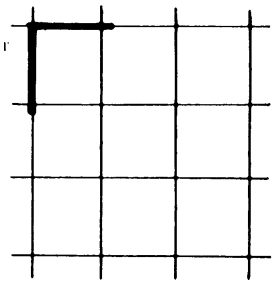
Rozważania przeprowadzimy w trzech przypadkach, w zależności od wymiaru d.

5.4. **Dowód twierdzenia Poly'a dla $d = 1$.** W jednym wymiarze jest łatwo, ponieważ rezystory są połączone szeregowo

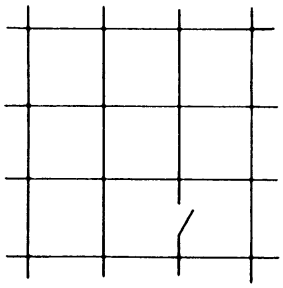
i widać, że $R^r_{\text{eff}} = r$, $R_{\text{eff}} = \infty$, $p_{\text{escape}} = 0$, zatem prosty spacer losowy jest rekurencyjny.

5.5. **Dowód twierdzenia Poly'a dla** $d = 2$. W dwóch wymiarach jest już trudniej, bo brakuje symetrii (to warto zobaczyć na przykładach). Będziemy próbowali modyfikować graf, tak aby zmniejszać efektywną rezystancję, która wciąż pozostanie nieograniczona. Skorzystamy z prawa Rayleigh'a i będziemy próbowali uprościć sieć dokonując operacji dwóch typów:

- **sklejanie:** łączymy pewien zbiór wierzchołków perfekcyjnym przewodem tak, że prąd swobodnie przechodzi pomiędzy nimi. Z punktu widzenia grafu oznacza to utożsamienie wierzchołków. W języku sieci elektrycznych zmniejszamy opór na odpowiednich krawędziach do 0. Zgodnie z prawem Rayleigh'a spowoduje to zmniejszenie efektywnej rezystancji R_{eff}.

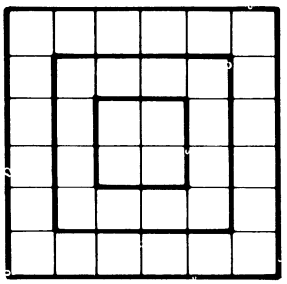


- **usuwanie:** usuniemy niektóre krawędzie, co odpowiada zwiększeniu na nich oporu do ∞, a więc zwiększeniu R_{eff}.

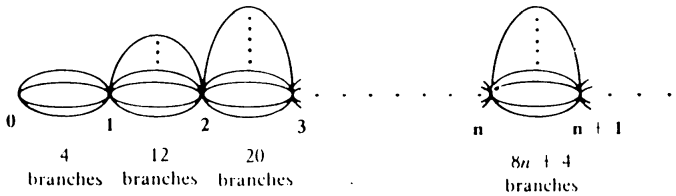


Do pokazania rekurencyjności będziemy sklejać, a do tranzytywności usuwać krawędzie.

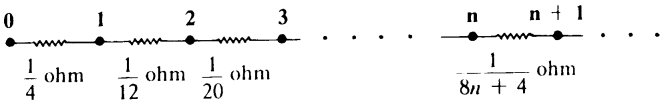
Przy użyciu sklejania przypadek płaszczyzny staje się łatwy. Sklejamy mianowicie wierzchołki jak na poniższym rysunku



w ten sposób otrzymujemy następującą sieć



Przypomnijmy, że n jednostkowych rezystorów połączonych równolegle można zastąpić pojedynczym rezystorem o oporze $1/n$. Zatem powyższy układ możemy zastąpić



Zatem całkowita rezystancja układu jest nieskończona, ponieważ

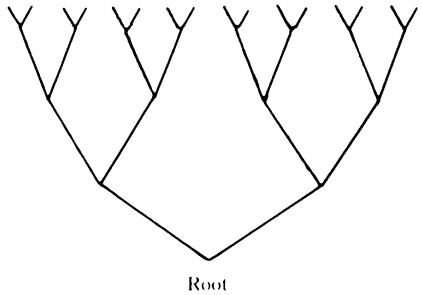
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8n+4} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty.
\end{aligned}$$

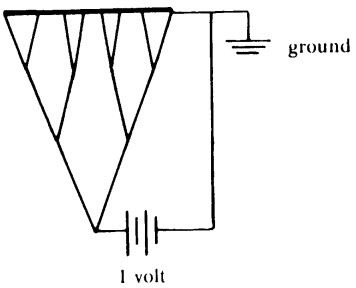
Rezystancja wyjściowej sieci musiała być wyższa, więc prosty spacer losowy na $\mathbb{Z}^2$ jest rekurencyjny.

5.6. **Dowód twierdzenia Poly'a dla $d = 3$.** Teraz chcemy pokazać, że spacer jest tranzytywny, a więc próbujemy usuwać krawędzie, co okazuje się być trudnym zadaniem. Chcielibyśmy uzyskać graf, którego rezystancję łatwo policzyć. Popatrzmy więc na grafy, które wydają się być łatwiejsze do analizy: drzewa. Są to grafy bez cykli. Dla przykładu poniżej jest pełne drzewo binarne

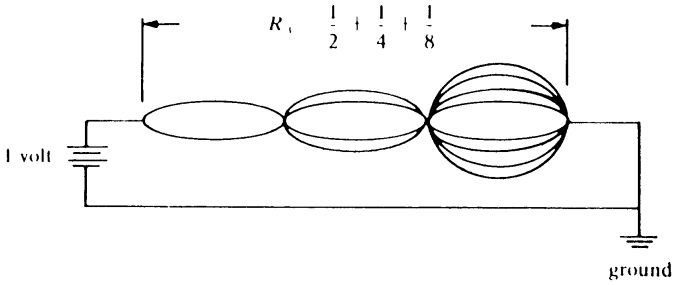


The full binary tree

Zacznijmy od wyliczenia efektywnej rezystancji pomiędzy korzeniem, a wierzchołkami n-tego pokolenia. W tym celu podłączamy baterię do korzenia oraz wierzchołków na n-tym poziomie.



Z uwagi na symetrię wszystkie wierzchołki na tym samym poziomie mają takie samo napięcie. Możemy więc utożsamić je ze sobą i nie wpłynie to na przepływ prądu w krawędziach. Otrzymamy wówczas nowy graf



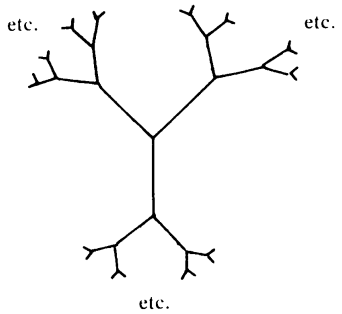
Widzimy, że rezystancja tego układu wynosi

$$R_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Zatem przechodząc z n do nieskończoności

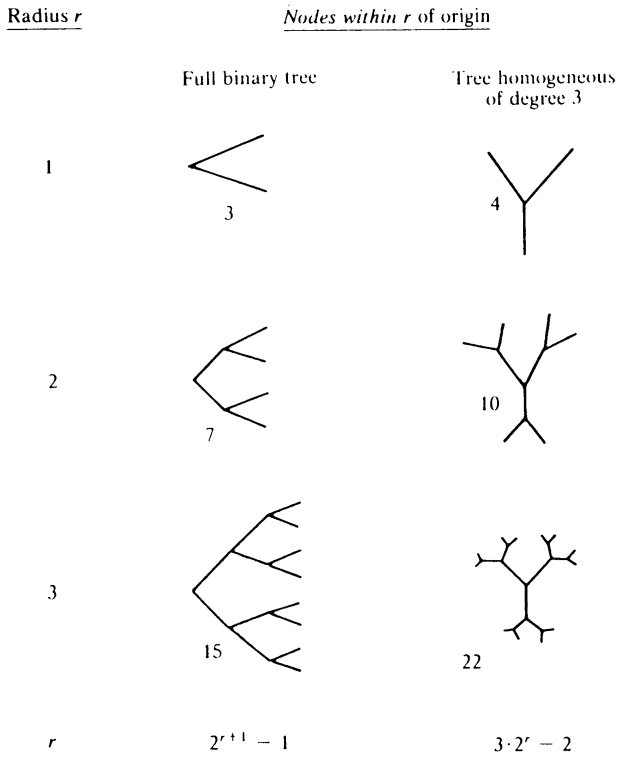
$$R_{\text{eff}} = 1.$$

A więc spacer na pełnym drzewie binarnym jest tranzytywny. Oczywiście w taki sam sposób można poradzić sobie z innymi drzewami jednorodnymi. Dla przykładu, dla drzewa jednorodnego stopnia 3, efektywna rezystancja wynosi 2/3.

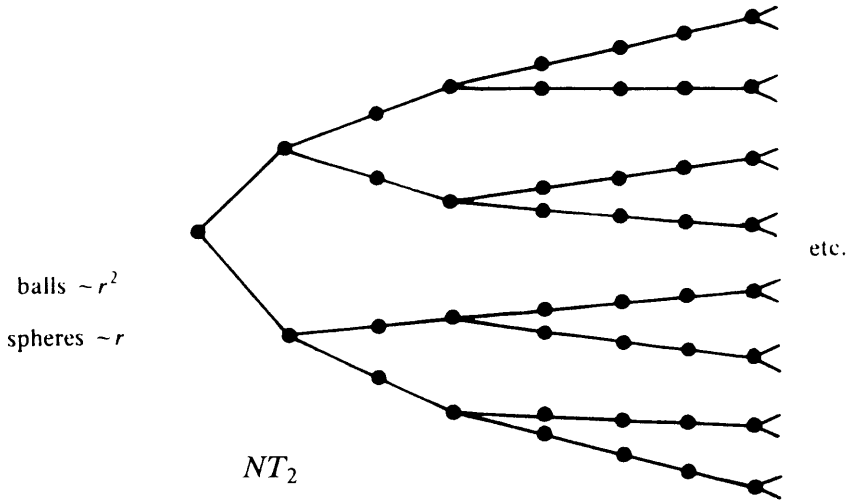


The tree homogeneous of degree 3

Wygodnie byłoby więc włożyć drzewo lub zbliżone grafy w $\mathbb{Z}^3$. Niestety są one zbyt duże. Żeby się o tym przekonać, policzmy liczbę wierzchołków w kulach o promieniu r.



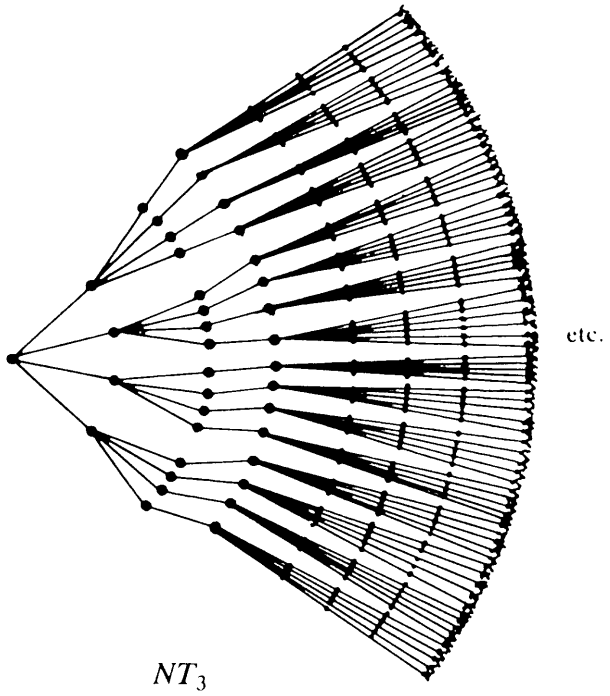
Widzimy więc, że jest to liczba rzędu 2^r, podczas gdy kula o promieniu r w $\mathbb{Z}^2$ zawiera około r^2 wierzchołków (sfera S_r zawiera $4r$, a kula $2r^2 - 2r + 1$). Kula o promieniu r w $\mathbb{Z}^3$ zawiera około r^3 wierzchołków. Nie pomieści więc odpowiedniego fragmentu drzewa. Ponieważ drzewa były bardzo wygodne w obliczeniach, spróbujmy znaleźć drzewo o dosyć regularnej strukturze, w którym rozmiar kul rośnie jak r^3. Dla przykładu narysujmy drzewo NT_2



Kolejne fragmenty mają długość 2^n, po czym rozdwajają się. Ten graf ma własność podobną do kul i sfer na $\mathbb{Z}^2$, mianowicie kula o promieniu r zawiera około r^2 punktów, a sfera około r punktów. Dokładniej, sfera o promieniu r zawiera $2^{[\log_2(r)]+1}$ punktów, zatem $r \leq |S^r| \leq 2r$. Wnioskujemy więc, że kula o promieniu r jako rozłączna suma

sfer S^k dla $k < r$ zawiera $\sum_{k=1}^{r-1} 2^{[\log_2(k)+1]}$ punktów. Ostatecznie $n(n+1)/2 \leq |G^r| \leq n(n+1)$.

Podobną konstrukcję przeprowadzamy, aby naśladować kule w $\mathbb{Z}^3$. Wówczas gdy podwaja się promień liczba punktów na sferze jest czterokrotnie większa. Definiujemy graf NT_3, w którym gałęzie drzewa dzielą się na 4.

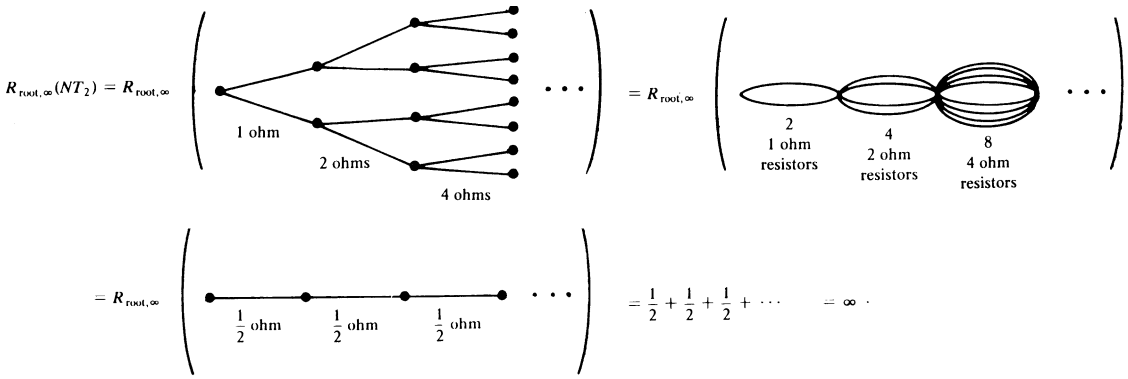


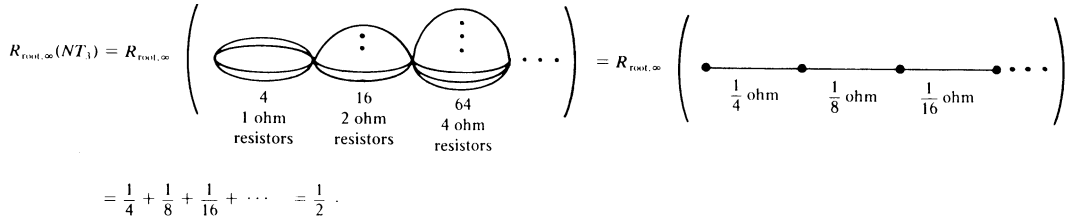
NT_3

Policzmy dokładnie liczbę wierzchołków w kuli. Niech $r = 2^n + k$ dla $k < 2^n$ (taki zapis jest jednoznaczny). Liczba elementów w kuli o promieniu r wynosi

$$\begin{aligned}|R_r| &= 1 + 4 + 2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4^3 + 8 \cdot 4^4 + \cdots + 2^{j-1} \cdot 4^j + \cdots + 2^{n-1}4^n + (k+1) \cdot 4^{n+1} \\ &= 1 + 2^{3 \cdot 1 - 1} + 2^{3 \cdot 2 - 1} + \cdots + 2^{3n-1} + (k+1)2^{2n+2} \approx C(2^n)^3 \approx Cr^3.\end{aligned}$$

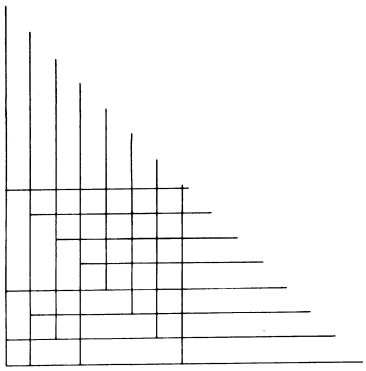
Policzmy całkowitą rezystancję obu grafów.



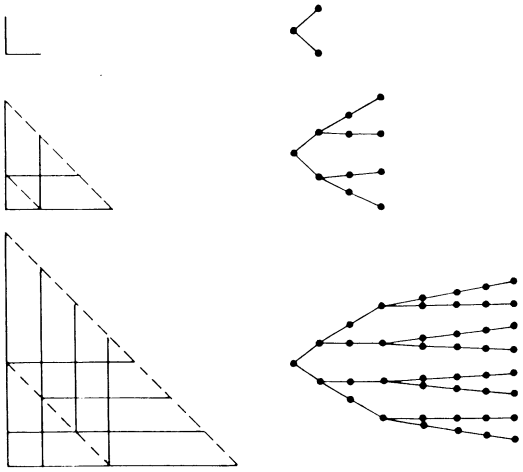


Tak więc NT_2 ma nieskończoną rezystancję, a NT_3 skończoną. Zatem prosty spacer losowy na NT_2 jest rekurencyjny, a na NT_3 tranzytywny (porównaj z twierdzeniem Pólya).

Jak jednak włożyć NT_3 w $\mathbb{Z}_3$? Spróbujmy najpierw uporać się z prostszym problem i włóżmy NT_2 w $\mathbb{Z}_2$. Wynik jest pokazany na poniższym obrazku

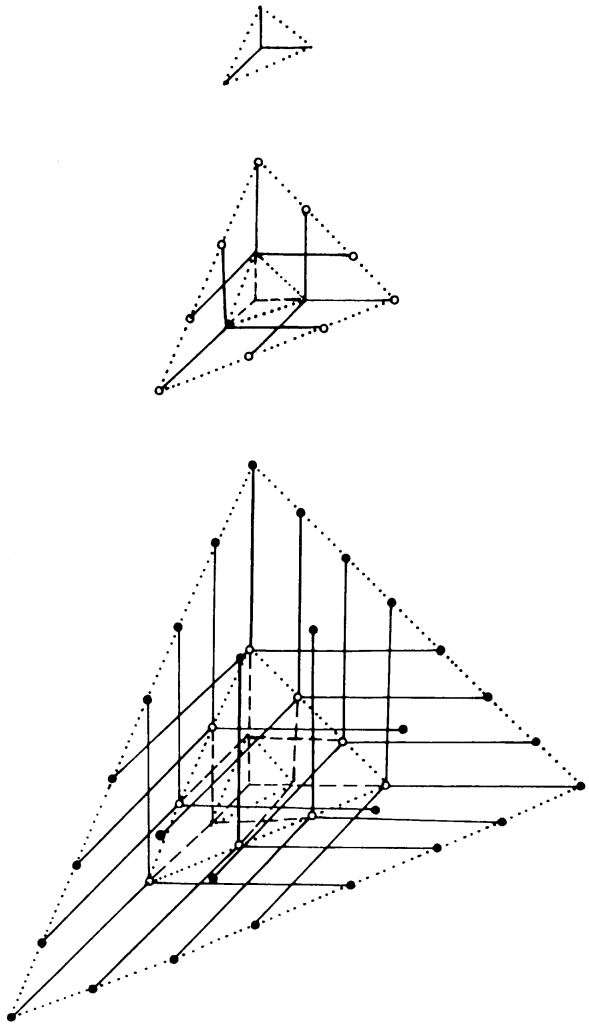


Wyjaśnimy jak go skonstruować. Startujemy z $\mathbf{0}$ i rysujemy dwa promienie, jeden idący na północ, a drugi na wschód. Jeżeli promienie przetną linię $x + y = 2^n - 1$ rozkładają się na dwa kolejne promienie. Poniżej pokazujemy pierwsze kroki

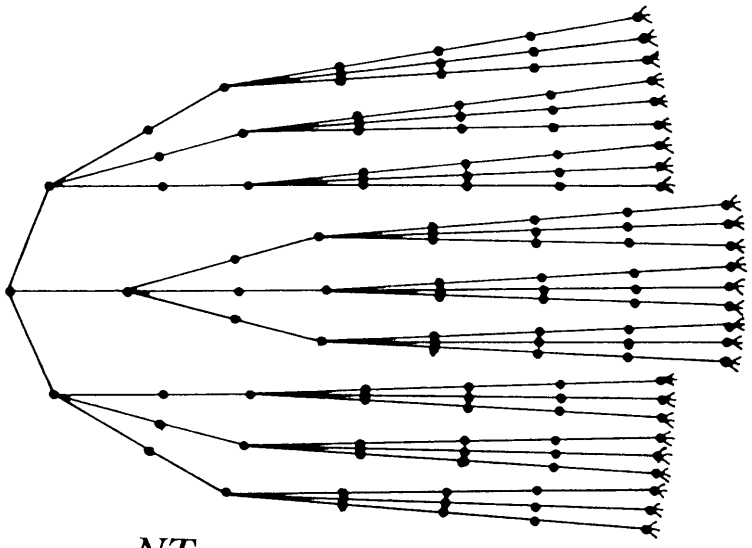


To nie jest dokładnie włożenie, bo niektóre punkty, które były rozłączne w NT_2 tutaj są jednym punktem. Tę konstrukcję można poprawić, ale nie ma takiej potrzeby. Zauważmy bowiem, że po podłączeniu baterii, punkty, które zostały utożsamione miały i tak identyczne napięcie. Sklejenie ich nie ma więc wpływu na rezystancję całego układu. Aby skonstruować podobne włożenie w $\mathbb{Z}^3$ również zaczynamy od

punktu **0**. Wypuszczamy z niego 3 promienie (północ, wschód, do góry). Jeżeli promień przetnie płaszczyznę $x + y + z = 2^n - 1$ rozdziela się na 3.



Tak skonstruowany podgraf nie jest jednak NT_3, a $NT_{2,5849...}$



$NT_{2.5849\ldots}$

Liczba w indeksie oznacza rozmiar drzewa. Jeżeli podwoimy promień, to liczba punktów w kuli zostanie pomnożona przez

$$6 = 2^{\log_2 6} = 2^{2,5849\ldots}$$

Podobnie pewne pary punktów zostały utożsamione, ale to nie wpływa na efektywną rezystancję układu. Pozostaje do policzenia całkowita rezystancja $NT_{2,5849\ldots}$:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.$$

Udało nam się więc znaleźć nieskończony podgraf $\mathbb{Z}^3$, który ma skończoną rezystancję. Rezystancja spaceru losowego na $\mathbb{Z}^3$ musi być mniejsza, więc spacer losowy jest tranzytywny.

Literatura

1. Dave Bayer and Persi Diaconis, *Trailing the dovetail shuffle to its lair*, The Annals of Applied Probability (1992), 294–313. `http://statweb.stanford.edu/~cgates/PERSI/papers/bayer92.pdf`
2. Persi Diaconis, *Group representations in probability and statistics*, Lecture Notes-Monograph Series (1988), i–192.
3. Peter G Doyle and J Laurie Snell, *Random walks and electric networks*, AMC **10** (1984), 12. `arxiv.org/pdf/math/0001057v1.pdf`
4. W Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, t. i, ii*, PWN, Warszawa **1978** (1977).
5. Ronald L Graham, Donald Ervin Knuth, Oren Patashnik, and Piotr Chrząstowski-Wachtel, *Matematyka konkretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1996.
6. Gina Kolata, *In shuffling cards, 7 is winning number*, New York Times **9** (1990), 1. `http://www.nytimes.com/1990/01/09/science/in-shuffling-cards-7-is-winning-number.html`
7. David Asher Levin, Yuval Peres, and Elizabeth Lee Wilmer, *Markov chains and mixing times*, American Mathematical Soc., 2009. `http://pages.uoregon.edu/dlevin/MARKOV/markovmixing.pdf`
8. Russell Lyons and Yuval Peres, *Probability on trees and networks*, 2005. `mypage.iu.edu/~rdlyons/prbtree/book.pdf`

9. Brad Mann, *How many times should you shuffle a deck of cards*, Topics in Contemporary Probability and Its Applications **15** (1995), 1–33. https://www.dartmouth.edu/~chance/teaching_aids/Mann.pdf

6. Zadania

1. Gracz zaczyna grę z kapitałem K. W każdym kroku rzuca symetryczną kostką. Jeżeli wypadnie i oczek, to mnoży swój kapitał przez $2(i-1)/5$. Oblicz wartość oczekiwaną kapitału gracza po n krokach.

2. Gracz startuje z kapitałem K. W każdej rundzie rzuca monetą, jeżeli wypadnie orzeł wygrywa 1, w przeciwnym razie traci 1. Gracz kończy grę, gdy jego kapitał osiągnie poziom n lub zbankrutuje. Oznaczmy ten moment przez X. Oblicz $\mathbb{E}X$.

3. Gracz startuje z kapitałem K. W każdej rundzie rzuca niesymetryczną monetą, na której orzeł wypada z prawdopodobieństwem p. Jeżeli wypadnie orzeł wygrywa 1, w przeciwnym razie traci 1. Gracz kończy grę, gdy jego kapitał osiągnie poziom n lub zbankrutuje. Oblicz prawdopobobieństwo zakończenia gry przez gracza z kapitałem n.

4. Pijany człowiek stoi 3 kroki od przepaści. Z prawdopodobieństwem p robi krok do przodu, a $q = p - 1$ do tyłu. Oblicz prawdopobobieństwo, że ocali swoje życie.

5. Alicja i Bill rzucają symetryczną monetą tak długo, aż wypadnie OOR lub ORR. Alicja wygrywa, gdy wzorzec OOR wypadnie jako pierwszy, natomiast Bill, gdy wypadnie ORR. Jaka jest oczekiwana długośc gry? Jaka jest oczekiwana długość gry jeżeli założymy, że wygra Alicja?.

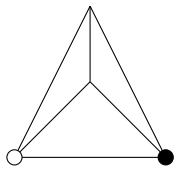
6. Alicja i Bill rzucają symetryczną monetą tak długo, aż wypadnie $OOOR$ lub $ORRR$. Alicja wygrywa, gdy wzorzec $OOOR$ wypadnie jako pierwszy, natomiast Bill, gdy wypadnie $ORRR$. Oblicz prawdopobobieństwo, że grę wygra Alicja.

7. Rzucamy wielokrotnie monetą. Oznaczmy przez T pierwszy moment, w którym wypadną trzy orły pod rząd. Oblicz $\mathbb{E}T$.

8. (Kolekcjonowanie kuponów) Kolekcjoner zbiera kupony n różnych typów. Za każdym razem, gdy kupuje nowy kupon, rozkład ich typów jest jednostajny. Niech T oznacza moment, gdy zbierze pełną kolekcję. Oblicz $\mathbb{E}T$. **Wskazówka:** niech X_t oznacza liczbę różnych typów zgromadzonych przez kolekcjonera w chwili t.

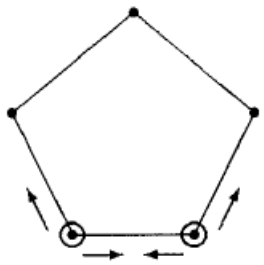
9. W wierzchołku A pięciokąta $ABCDE$ znajduje się jabłko, a dwa wierzchołki dalej, w C znajduje się robaczek. Każdego dnia robaczek pełza z prawdopodobieństwem $1/2$ do jednego z sąsiadnich wierzchołków. Po osiągnięciu wierzchołka A robaczek zatrzymuje się na obiad. Jaka jest wartość oczekiwana liczby dni, po których robaczek dotrze na obiad?

10. Alicja i Bill wędrują losowo po grafie. Początkowo Alicja jest w wierzchołku $\circ$, a Bob w $\bullet$. W każdym kroku przechodzą do jednego z sąsiednich wierzchołków z prawdopodobieństwem $1/3$. Niech T oznacza moment, którym się spotkają. Oblicz $\mathbb{E}T$.

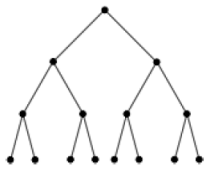


11. Pewien Pan ma problem ze znalezieniem pracy. Jeżeli jakiegoś poranka nie jest zatrudniony, to ze stałym prawdopodobieństwem p będzie zatrudniony przed wieczorem. Ale jeśli zaczyna on dzień będąc już zatrudnionym, to z prawdopobobieństwem q jeszcze przez zmrokiem zostanie zwolniony. Załóżmy, że pierwszego dnia rano był on zatrudniony. Niech X_n oznacza liczbę dni, okresie pierwszych n dni, kiedy był on zatrudniony. Co możesz powiedzieć o $\mathbb{E}X_n$? Czy umiesz policzyć granicę $\mathbb{E}X_n/n$?

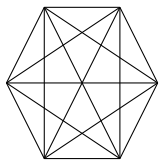
12. Pięć osób stoi w wierzchołkach pięciokąta. Mają oni dwa krążki, które początkowo znajdują się w sąsiednich wierzchołkach, jak na rysunku. W każdej jednostce czasu, każdy krążek rzucany jest niezależnie do lewego lub prawego sąsiada z prawdopobobieństwem $1/2$. Kontynuujemy grę tak długo, aż jedna osoba otrzyma dwa krążki równocześnie i wtedy kończymy grę. Oblicz czas oczekiwany długości gry.



13. Rozważmy nieredukowalny spacer na skierowanym grafie $G = (V, E)$ (tzn. dla każdych wierzchołków x, y istnieje n takie, że prawdopobobieństwo przejścia z x do y w dokładnie n krokach jest ściśle dodatnie). Załóżmy, że spacer startuje w wierzchołku $x_0 \in V$. Pokaż, że dla dowolnego $v \in V$ prawdopodobieństwo, że spacer losowy nigdy nie odwiedzi wierzchołka v wynosi 0.



14. Rozważamy prosty spacer losowy na pełnym drzewie binarnym o głębokości n. Jest to drzewo z korzeniem, w którym każdy wierzchołek, do głębokości n, ma 2 potomków. Obok znajduje się przykład pełnego drzewa binarnego o głębokości 3. Załóżmy, że spacer losowy startuje w korzeniu. Niech T będzie pierwszym momentem, w którym odwiedzony zostanie jeden z liści (tzn. wierzchołek bez potomków). Oblicz $\mathbb{E}T$.

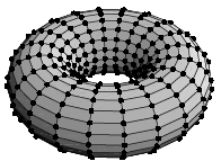


15. Graf nazywamy pełnym, gdy każde dwa wierzchołki są połączone krawędzią. Rozważmy prosty spacer losowy na pełnym grafie, tzn. będąc w wierzchołku x przechodzimy do y z prawdopodobieństwem $1/n$. Niech T będzie momentem, gdy odwiedzimy ostatni wierzchołek grafu. Oblicz ET.

16. Pokaż, że jeżeli spacer losowy nie jest redukowalny i nie jest cykliczny, to istnieje taka liczba M, że dla każdych dwóch wierzchołków x, y i każdego $n > M$, $P^n(x, y) > 0$. Przez $P^n(x, y)$ oznaczamy prawdopobobieństwo przejścia z x do y w n krokach.

17. Rozważmy spacer losowy na torusie. Niech $m, n \in \mathbb{N}$,

$$V = \big\{(x, y) : \ x \in \{0, \ldots, m-1\}, y \in \{0, \ldots, n-1\}\big\}.$$



Jeżeli proces jest w stanie (x, y), to przechodzi do stanów $((x+1) \mod m, y)$ lub $(x, (y+1) \mod n)$ z prawdopobobieństwem $1/2$. Pokaż, że ten spacer jest nieredukowalny. Pokaż, że proces nie jest periodyczny wtedy i tylko wtedy gdy NWD $(m, n) = 1$.

18. Skoczek znajduje się w rogu szachownicy. Zaczyna się poruszać w sposób losowy wybierając za każdym razem w sposób jednostajny jeden z dozwolonych ruchów. Jaka jest wartość oczekiwana liczby ruchów po których skoczek wróci do punktu startowego?

19. Rozważmy spacer losowy na $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$, w którym cząsteczka porusza się w lewo lub w prawo z prawdopobobieństwem $1/2$, za wyjątkiem punktów 0 i n. W punkcie n spacer pozostaje lub przechodzi do $n-1$ z prawdopobobieństwem $1/2$. Stan 0 jest stanem absorbującym, a więc po trafieniu w niego cząsteczka pozostanie w nim na zawsze. Oblicz wartość oczekiwaną czasu trafienia w 0 cząsteczki, która startuje w punkcie n.

20. Rozważmy prosty spacer losowy na $\mathbb{Z}_n$. Jeżeli spacer losowy jest w stanie x, to przechodzi do stanów $(x+1) \mod n$ lub $(x-1) \mod n$ z prawdopodobieństwem $1/2$. Jak wygląda wówczas graf? Oznaczmy przez τ pierwszy moment w którym zostały odwiedzone wszystkie stany. Oblicz $\mathbb{E}\tau$. **Wskazówka:** skorzystaj z zadania kwalifikacyjnego o ruinie gracza.

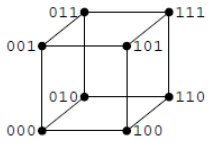
21. W dwóch urnach znajduje się w sumie k kul (k-ustalona liczba). Definiujemy w następujący sposób spacer losowy (jak wygląda wówczas graf?). W każdym kroku losujemy jednostajnie jedną z kul i przekładamy ją do sąsiedniej urny. Niech X_n oznacza liczbę kul znajdujących się w czasie n w pierwszej urnie. Znajdź rozkład stacjonarny.

22. Rozważmy spacer losowy na $\mathbb{Z}_n$ startujący z 0. Niech W oznacza ostatni odwiedzony wierzchołek. Pokaż, że dla każdego $k = 1, .., n-1$, $\mathbb{P}[W = k] = 1/(n-1)$.

23. Oblicz $\|\mu - \nu\|_{\mathrm{TV}}$ dla następujących przykładów

- $\mu \sim \mathrm{Bin}(4, 1/2)$, $\nu \sim \mathrm{Bin}(4, 1/4)$
- μ jest miarą jednostajną na S_n (zbiorze wszystkich permutacji zbioru n-elementowego), a ν jest miarą jednostajną na wszystkich permutacjach zachowujących 1.

24. Spacer losowy na n-hiperkostce. n-hiperkostka jest to graf, którego wierzchołkami są ciągi binarne długości n, tzn $\Omega = \{0,1\}^n$. Dwa wierzchołki są połączone ze sobą krawędzią jeżeli różnią się dokładnie na jednej współrzędnej. Tak więc każdy wierzchołek ma dokładnie n sąsiadów. Prosty spacer losowy polega na przejściu z wierzchołka $x = (x_1, \ldots, x_n)$ do jednego z jego sąsiadów z prawdopobobieństwem $1/n$. Dla $n = 3$ jest to prosty spacer losowy po wierzchołkach sześcianu.



- Uzasadnij, że rozkład jednostajny jest stacjonarny.
- Pokaż, że ten spacer jest periodyczny.

Modyfikujemy spacer, aby uniknąć periodyczności. Rozważamy **leniwy spacer losowy**, gdy cząsteczka zostaje w danym wierzchołku w prawdopobobieństwem 1/2, a z prawdopobobieństwem 1/2 przechodzi jednostajnie do jednego z sąsiadów (tzn. $1/(2n)$ do każdego z sąsiadów).

- Pokaż, że leniwy spacer losowy nie jest periodyczny i nie jest redukowalny.
- Pokaż, że rozkład jednostajny jest rozkładem stacjonarnym.

Wskazówka: Popatrzmy na ten proces nieco inaczej. Przejście do sąsiada powoduje zmianę wartości na jednej ze współrzędnych (z prawdopobobieństwem $1/(2n)$). Wylosujmy jednostajnie jedną ze współrzędnych, a następnie zmieńmy ją z prawdopobobieństwem 1/2.

25. Niech $X_t = (x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \ldots, x_n^{(t)})$ będzie pozycją leniwym spacerem losowym na n-hiperkostce $\Omega = \{0,1\}^n$ w chwili t. Rozważmy odległość X_t od $\mathbf{0}$ daną wzorem $W_t = \|X_t\|_1 = \sum_{k=1}^n x_k^{(t)}$. Zauważ, że wówczas W_t również jest spacerem losowym na grafie (jakim?). Wyznacz prawdopodobieństwa przejścia $P(x, y)$. Korzystając ze znajomości rozkładu stacjonarnego dla X_t wywnioskuj postać rozkładu stacjonarnego dla W_t. Porównaj otrzymane wyniki z tymi z zadania **21** .

26. Rozważmy następujący sposób tasowania kart (odwrotny do Top-To-Random). Wyciągamy (losowo) jedna z kart z talii i kładziemy ją na górze talii. Oszacuj czas po którym talia jest potasowana.

27. Załóżmy, że wykonujemy perfekcyjne tasowanie Riffle Shuffle, tzn. w każdym kroku talia kart zostaje podzielona dokładnie na połowę, a następnie oba zbiory zostają perfekcyjnie połączone, tzn. karty są na zmianę z lewej i prawej ręki. Czy umiesz powiedzieć co się wówczas dzieje z kartami?

28. (Geometryczna interpretacja Riffle Shuffle). Wylosujmy (niezależnie i jednostajnie) n punktów z odcinka $[0,1]$. Oznaczmy je rosnąco $x_1, \ldots x_n$. Następnie zastosujmy odwzorowanie piekarza $x \mapsto 2x \mod 1$ do tych punktów. Pokaż, że indukowana permutacja punktów ma dokładnie taki sam rozkład jak w tasowaniu Riffle Shuffle.

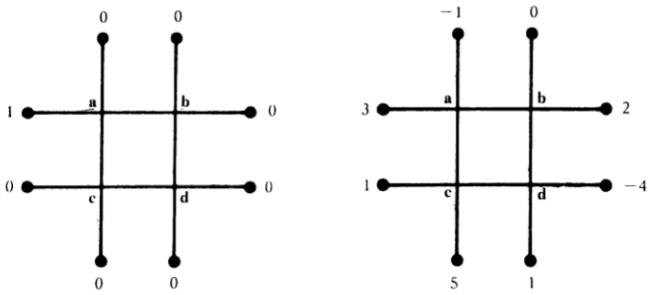
29. Magicy podczas występów wykonują następującą sztuczkę. Wręczana jest talia kart losowej osobie z publiczności (naprawdę losowej). Wybrana osoba proszona jest, aby potasować trzykrotnie karty metodą Riffle Shuffle. Następnie osoba tasująca bierze kartę z wierzchu ogląda ją i wkłada w losowe miejsce w talii. (Wprawny magik pozwala na kolejne potasowanie kart). Talia kart wraca do magika, który z dużym prawdopobobieństwem potrafi określić która karta została włożona do wnętrza talii. Wyjaśnij tę sztuczkę. **Wskazówka:** Posłuż się językiem ciągów rosnących. Przypatrzmy się wyglądają permutacje losowane podczas jednego wykonania tasowania Riffle Shuffle. Dla przykładu, załóżmy, że karty ułożone są rosnąco 12345678. Dzielimy je na dwa zbiory 123 i 45678, a następnie łączymy otrzymując np. $4_{12}567_38$. Zauważmy, że permutacja zawiera 2 ciągi rosnące (przez ciąg rosnący rozumiemy ciąg, w którym kolejne elementy składają się z kolejnych liczb naturalnych)...

30. Załóżmy, że posiadamy 4 ręce i tasujemy karty metodą Riffle Shuffle, ale tym razem dzieląc karty na 4 zbiory, które potem łączymy. Takie tasowanie nazwiemy metodą 4-Riffle Shuffle. Dopracuj szczegóły. Ile tasowań jest potrzebnych do potasowania talii?

31. Niech Q będzie rozkładem na zbiorze permutacji odpowiadającym jednemu tasowaniu Riffle Shuffle. Pokaż, że

$$Q(\pi) = \begin{cases} (n+1)/2^n & \text{jeżeli } \pi = id \\ 1/2^n & \text{jeżeli } \pi \text{ ma dwa ciągi rosnące} \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

32. Pokaż, że wykonanie a-Riffle Shuffle('przy pomocy a rąk'), a następnie b-Riffle Shuffle jest równoważne tasowaniu ab-Riffle Shuffle.



RYSUNEK 7. Po lewej graf z zadania **33**. Po prawej graf z zadań **34** oraz **35**

33. Rozważmy spacer losowy na grafie z Rysunku 7. Znajdź prawdopodobieństwo osiągnięcia wierzchołka z wartością 1 przed osiągnięciem jakiegokolwiek z wierzchołków z wartością 0 dla każdego z punktów startowych a, b, c oraz d.

34. Znajdź funkcję harmoniczną dla prostego spaceru losowego na grafie z Rysunku 7 z wnętrzem złożonym z punktów a, b, c oraz d.

35. Gra polega na wypuszczeniu w punkcie a prostego spaceru losowego na grafie z Rysunku 7. Gdy spacer osiągnie brzeg, otrzymujesz wypłatę zgodną z wartością wierzchołka. Jaka jest średnia wypłata w tej grze? Zaproponuj wartości brzegowe dla których ta gra będzie sprawiedliwa.

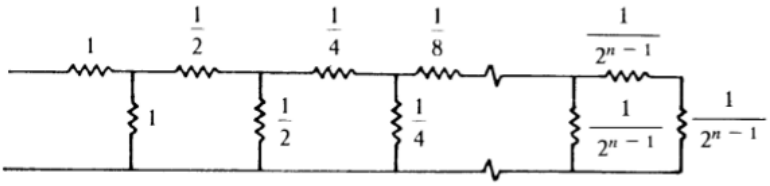
36. Pokaż, że jeżeli funkcja jest harmoniczna na całym grafie (spójnym), to musi być stała.

37. Podaj przykład spaceru losowego który nie odpowiada żadnej sieci elektrycznej.

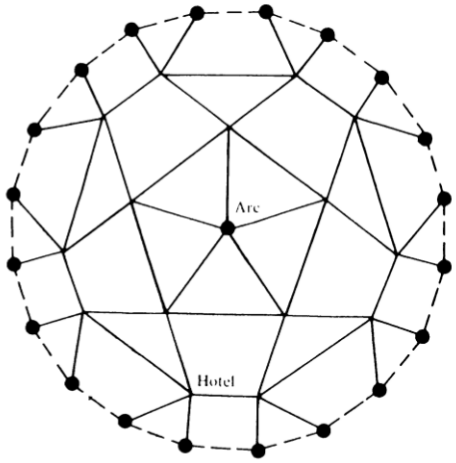
38. W amerykańskim kasynie koło ruletki zawiera liczby od 1 do 36 oraz pola 0 i 00. Połowa niezerowych liczb jest czerwona, druga połowa jest czarna, a 0 i 00 są zielone. Popularnym zakładem jest postawienie dolara na kolor czerwony. Jeżeli wypadnie czerwona liczba gracz otrzymuje 2 dolary (czyli wygrywa 1 dolara), w przeciwnym razie traci dolara.

- Załóżmy, że gracz startuje z 40 dolarami i gra tak długo aż osiągnie 50 dolarów lub zbankrutuje. Oblicz prawdopobobieństwo, że ostatecznie skończy z 50 dolarami.
- Ile pieniędzy musiałby mieć gracz na początku, aby prawdopobobieństwo wygrania 10 dolarów przed bankructwem wynosiło 95/100

39. Rozważmy spacer losowy z zadania **21** dla $k = 4$ kul. Zakładając, że na samym początku w urnach znajdują się po dwie kule, znajdź średnią liczbę kroków potrzebną do opróżnienia jednej z urn.



Rysunek 8. Układ drabinowy z zadania **41**



Rysunek 9. Mapa Paryża z zadania **43**

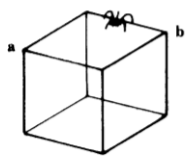
40. Rozważmy spacer losowy z zadań **21** i **39** dla $k = 4$ kul. Określić sieć elektryczną związaną z tym spacerem. Zakładając, że na samym początku pierwsza urna jest pusta, znajdź prawdopodobieństwo jej zapełniania przed ponownym opróżnieniem (prawdopodobieństwo osiągnięcia stanu 4 przed powrotem do 0).

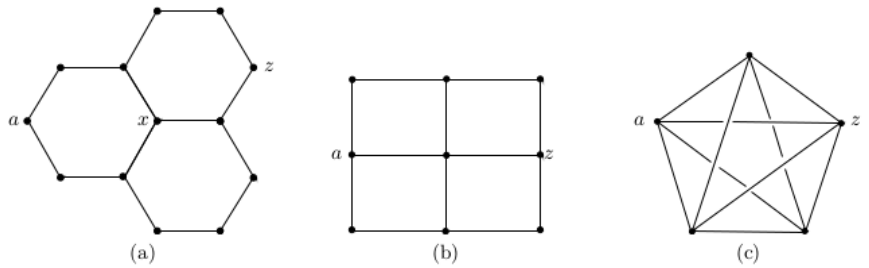
41. Rozważmy drabinowy układ rezystorów na rysunku 8. Pokaż, że jeżeli R_n jest efektywną rezystancją układu z n szczeblami, to $R_1 = 2$ oraz

$$R_{n+1} = \frac{2 + 2R_n}{2 + R_n}.$$

Wywnioskuj, że $\lim_{n\to\infty} R_n = \sqrt{2}$.

42. Robaczek spaceruje losowo po kostce jednostkowej (rysunek obok). Jeżeli robaczek zaczyna w punkcie a, jakie jest prawdopodobieństwo, że dotrze do jedzenia, które jest w punkcie b, przed powrotem do punktu a?





RYSUNEK 10. grafy z zadania **46**

43. Pijany turysta wychodzi ze swojego hotelu na spacer (losowy) ulicami Paryża (Rysunek 9). Jakie jest prawdopodobieństwo, że odwiedzi Łuk Triumfalny przed opuszczeniem miasta?

44. Wykaż, że dla nieujemnych a, b, c, d

$$\frac{1}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}} \geq \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}.$$

Wskazówka: Znajdź układy rezystorów o odpowiednich efektywnych rezystancjach i zastosuj prawo monotoniczności.

45. Pewien wrocławski profesor ma łącznie n parasoli, z których $k \in (0, n)$ znajduje się początkowo w jego gabinecie a pozostałe $n - k$ w jego domu. Każdego poranka profesor idzie do swojego biura i wraca wieczorem do domu. Na każdy spacer zabiera ze sobą parasol tylko gdy pada deszcz. Zakładając, że opady przy okazji każdego spaceru są niezależne, a ich prawdopodobieństwo wynosi $p \in (0, 1)$:

(1) Oblicz średnią liczbę spacerów zanim wszystkie n parasoli znajdzie się w jednym miejscu.
(2) Oblicz średnią liczbę spacerów zanim profesor zmoknie.

46. Rozważmy proste spacery losowe na grafach z rysunku 10.

(a) Załóżmy, że startujemy w punkcie x. Jakie jest prawdopodobieństwo, że odwiedzimy punkt a przed odwiedzeniem punktu z?
(b), c) Wyznacz efektywną rezystancję odpowiadającej sieci elektrycznej.

47. Dla n-hiperkostki (zadanie **24** znajdź efektywną rezystancję pomiędzy $(0, ..., 0)$, a $(1, ..., 1)$.

---

48. Załóżmy, że spacer losowy na nieskończonym grafie jest rekurencyjny. Pokaż, że **każdy** punkt zostanie odwiedzony nieskończenie wiele razy.

49. Załóżmy, że spacer losowy na nieskończonym grafie jest tranzytywny. Pokaż, że każdy punkt zostanie odwiedzony skończenie wiele razy.

50. Na zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z punktu 0 startują jednocześnie dwa proste spacery losowe. Poruszają się one w sposób niezależny. Pokaż, że spotkają się one nieskończenie wiele razy w punkcie 0.

51. Uzasadnij, że prosty spacer losowy na $\mathbb{Z}^d$ dla $d \geq 4$ jest tranzytywny.

52. Rozważmy prosty spacer losowy na $\mathbb{Z}^3$. Pokaż, że nieskończenie wiele razy przetnie on prostą $x = y = 0$.

53. Rozważmy prosty spacer losowy na $\mathbb{Z}^3$. Pokaż, że nieskończenie wiele razy odwiedzi on zbiór punktów postaci $(0, 0, 7k)$.

54. Rozważamy spacer losowy na $\mathbb{Z}$ startujący w 0. Taki, że

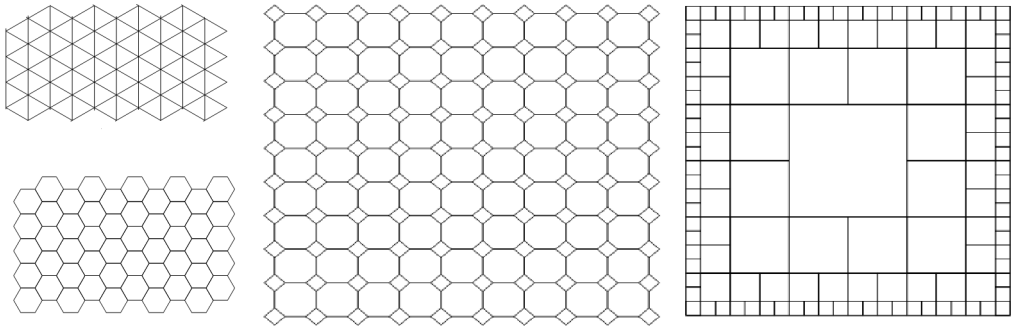
$$P(n, n+1) = P(-n, -(n+1)) = p_n, \qquad P(n+1, n) = P(-(n+1), -n) = q_n = 1-p_n.$$

oraz $P(0, 1) = P(0, -1) = 1/2$

a) Załóżmy, że dla każdego n, $p_n = \frac{2}{3}$. Czy jest to spacer rekurencyjny, czy tranzytywny?
b) Załóżmy, że $p_n = 3/4$ dla n niepodzielnych przez 3 i $p_n = 1/10$ dla n podzielnych przez 3. Czy jest to spacer rekurencyjny, czy tranzytywny?
c) Znajdź ogólne kryterium w terminach p_n rozstrzygające kiedy spacer jest rekurencyjny.
d) Zastanów się, dla jakich wartości p_n Twoje kryterium daje różne wyniki.

55. Niech G będzie dowolnym spójnym grafem. Rozważmy prosty spacer losowy na G, tzn. będąc w danym wierzchołku przechodzimy do jednego z jego sąsiadów z takim samym prawdopodobieństwem. Pokaż, że taki spacer można wyrazić w języku sieci elektrycznych. Czy każdy spacer losowy można przekształcić na język sieci?

56. Zbadaj zachowanie spacerów losowych na poniższych grafach (są to fragmenty nieskończonych grafów):



57. Automorfizmem grafu G nazywamy odwzorowanie ϕ, które jest różnowartościowe przekształca G na G i takie, że x i y są sąsiadami wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi(x)$ i $\phi(y)$ są sąsiadami. Mówimy, że G jest sferycznie symetryczny wokół o, jeżeli dla każdych dwóch wierzchołków x, y o takiej samej odległości od o istnieje automorfizm taki, że $\phi(o) = o$ oraz $\phi(x) = y$. Niech a_n będzie liczbą krawędzi łączących wierzchołki o odległości $n-1$ z n. Pokaż, że prosty spacer losowy na G jest tranzytywny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \cdots < \infty.$$

Zastosuj ten wynik do przykładów z poprzedniego zadania.

58. Zbadaj drzewo $NT_{\log_2 6}$ przedstawione podczas wykładu. Oszacuj wielkość kuli o promieniu r. Uzupełnij argument dotyczący tranzytywności prostego spaceru losowego.

59. Narysuj kilka nieskończonych drzew o regularnej strukturze. Zbadaj problem trazytywności/rekurencyjności prostego spaceru losowego Zbadaj drzewa - kiedy jest tranzytywnosc, a kiedy rekurencyjnosc

Dodatek A. Elementy kombinatoryki

Kombinatoryka to dział matematyki, którego przedmiotem jest badanie możliwych zestawień i ugrupowań, jakie można utworzyć z elementów danego zbioru skończonego. Dla uproszczenia będziemy zakładać, że rzeczonym skończonym zbiorem jest $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ dla naturalnego n. Uwaga, tutaj kolejność elementów zbioru $[n]$ nie ma znaczenia. Metody kombinatoryki wykorzystywane są w wielu różnych działach matematyki - głównie jednak w rachunku prawdopodobieństwa oraz teorii liczb.

Przykład A.1. Ile liczb dwucyfrowych można utworzyć z elementów zbioru $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$? Ile spośród tych liczb ma różne cyfry?

Definicja A.1. Ciągiem długości k elementów zbioru $[n]$ nazywamy dowolną listę $(i_1, i_2, \ldots i_k)$ (z wyróżnioną kolejnością), gdzie $i_1, i_2, \ldots, i_k \in [n]$. Ciąg nazywamy różnowartościowym, jeżeli $i_j \neq i_l$ dla $j \neq l$.

Przykład A.2. Ile jest różnowartościowych ciągów dwuelementowych zbioru $[n]$? Są to listy postaci (i_1, i_2), gdzie $i_1 \neq i_2$. Pierwszy element i_1 może przyjąć dowolną z n wartości, natomiast i_2 przy ustalonym i_1 może przyjąć tylko $n-1$ wartości (ponieważ $i_1 \neq i_2$). Daje to ostatecznie $n \cdot (n-1)$ różnowartościowych ciągów dwuelementowych zbioru $[n]$.

Lemat A.1. *Ze zbioru $[n]$ można wybrać $n^{\underline{k}}$ różnowartościowych ciągów k-elementowych, gdzie*

$$n^{\underline{k}} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Dowód. Pozostawiamy czytelnikowi. Wskazówka: Przykład A.2. □

Definicja A.2. **Permutacją** zbioru $[n]$ (n elementowego) nazywamy dowolny różnowartościowy ciąg długości n elementów zbioru $[n]$.

Wniosek A.2. *Zbiór $[n]$ posiada $n!$ (czyt. n silnia) różnych permutacji, gdzie*

$$n! = \begin{cases} 1 & \textit{dla } n = 0 \textit{ lub } n = 1 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n & \textit{dla } n > 1 \end{cases}.$$

Dowód. Zastosować Lemmat A.1 dla $k = n$. □

Przykład A.3. Ile wyrazów można utworzyć z liter wyrazu "masło"? Uwaga: wyrazem w tym kontekście jest dowolny zbitek liter, niekoniecznie posiadający sens w języku polskim (więc tutaj "ołmas" również jest wyrazem). Każdemu wyrazowi utworzonemu z liter wyrazu "masło" zapisanego $\mathrm{m}_1\mathrm{a}_2\mathrm{s}_3\mathrm{ł}_4\mathrm{o}_5$ odpowiada permutacja elementów zbioru [5]. Wszystkich wyrazów jest zatem $5! = 120$.

Przykład A.4. Ile wyrazów można utworzyć z liter wyrazu "całka"? Zauważmy, że przyporządkowanie $\mathrm{c}_1\mathrm{a}_2\mathrm{ł}_3\mathrm{k}_4\mathrm{a}_5$ z poprzedniego przykładu zlicza każdy wyraz dwukrotnie, dla przykładu dwie różne permutacje $(1, 2, 4, 3, 5)$ i $(1, 5, 4, 3, 2)$ odpowiadają temu samemu wyrazowi "cakła". Z racji tego, że zbiór $\{2, 5\}$ posiada $2!$ różnych permutacji, to każdy wyraz zostanie w ten sposób zliczony dwukrotnie, co daje ostateczny wynik $\frac{5!}{2!} = 60$ równych wyrazów z liter wyrazu "całka". Ile wyrazów można ułożyć z liter wyrazu "kaaba"? "matematyka"?

Definicja A.3. Kombinacją k elementową zbioru $[n]$ nazywamy dowolny k-elementowy podzbiór $[n]$.

Przykład A.5. Rozważmy zbiór $[5]$. Przykładem kombinacji dwuelementowej tego zbioru jest $\{3,5\}$ ($=\{5,3\}$ ponieważ kolejność elementów nie ma znaczenia). Ile jest wszystkich kombinacji dwuelementowych zbioru $[5]$? Wskazówka: nie jest to 20.

Lemat A.3. *Liczba kombinacji k-elementowych zbioru $[n]$ (n-elementowego) wynosi $\binom{n}{k}$ (czyt. n po k), gdzie*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}.$$

Dowód. Przy pomocy każdej kombinacji k-elementowej $\{i_1, i_2, \dots i_k\}$, poprzez permutację dolnych indeksów możemy stworzyć różnowartościowy ciąg k-elementowy. Wszystkich permutacji indeksów jest $k!$, więc dostaniemy $k!$ takich ciągów. W ten sposób dostaniemy każdy taki ciąg, a łącznie jest ich $n^{\underline{k}}$ (Lemat A.1). Wiemy więc, że

$$k! \cdot \text{liczba kombinacji } k\text{-elementowych} = n^{\underline{k}}.$$

□

Kolejnym podstawowym narzędziem kombinatorycznym jest suma. Powiedzmy, że mamy do zbadania sumę

$$a_1 + a_2 + ... + a_n,$$

gdzie każde a_k jest w jakiś sposób określoną liczbą. Notacja ta ma tę zaletę, że przy odrobinie wyobraźni pozwala "ujrzeć" całą sumę, tak jakby została napisana w całości. Każdy element a_k nazywamy *wyrazem* lub *składnikiem* sumy. Zapis ten bywa jednak niekiedy niejednoznaczny. Dostępne są inne możliwości, w szczególności zapis

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

nazywany zapisem Sigma, ze względu na literę grecką Σ (duże sigma). Notacja ta każe włączyć do sumy dokładnie te wyrazy a_k, których indeks k jest liczbą całkowitą zawierającą się pomiędzy 1 a n włącznie. Mówimy "sumujemy względem k od 1 do n włącznie". Zmienna indeksowa k jest nazywana zmienna związaną ze znakiem Σ ponieważ k w a_k jest oderwane od czegokolwiek poza sumą. Oczywiście każda inna litera mogłaby pełnić rolę k bez wpływu na wartość sumy.
Zapis ten możemy uogólnić do postaci

$$\sum_{k \in K} a_k \quad \text{lub} \quad \sum_{P(k)} a_k,$$

gdzie pierwszy każe sumować po wszystkich k będących elementami K, a drugi gdzie $P(k)$ jest pewnym zdaniem traktującym o k, każe włączyć do sumy wszystkie te wyrazy dla których $P(k)$ jest prawdziwe. Dla przykładu, sumę wszystkich kwadratów

nieparzystych liczb całkowitych mniejszych niż 100 możemy zapisać

$$\sum_{\substack{1 \le k < 100 \\ k\, nieparzyste}} k^2.$$

Kluczem do sukcesu przy działaniu na sumach jest zdolność zmiany jednej Σ ma drugą prostszą lub bliższą celu. Często wystarcza zastosować pewne podstawowe prawa transformacji. Niech A, B będą dowolnymi skończonymi podzbiorami zbioru liczb całkowitych. Sumę po elementach zbioru A i B można przekształcić za pomocą 3 następujących prostych praw:

$$\sum_{k\in A} ca_k = c\sum_{k\in A} a_k \quad \text{(prawo rozdzielności)}$$

$$\sum_{k\in A}(a_k + b_k) = \sum_{k\in A} a_k + \sum_{k\in A} b_k \quad \text{(prawo prawo łączności)}$$

$$\sum_{k\in A} a_k + \sum_{k\in B} a_k = \sum_{k\in A\cup B} a_k + \sum_{k\in A\cap B} a_k.$$

Jak zapisać przy pomocy notacji Σ prawo przemienności? Jednym z podstawowych problemów operacji na sumach jest znalezienie jej zwartej postaci.

Lemat A.4. *Dla dowolnych rzeczywistych x, y i dowolnego naturalnego n mamy*

$$(x+y)^n = \sum_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Dowód. Pozostawiamy jako ćwiczenie. □

Dodatek B. Pojęcie prawdopodobieństwa

Skupimy się teraz na bardzie formalnym i abstrakcyjnym ujęciu prawdopodobieństwa. Przez $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ będziemy oznaczać przestrzeń próbek (zdarzeń elementarnych), czyli po prostu zbiór możliwych wyników (pewnego) zdarzenia losowego. Każdy element $\omega \in \Omega$ będzie nazywany więc zdarzeniem elementarnym lub wynikiem, a każdy podzbiór $A \subseteq \Omega$ zdarzeniem.

Przykład B.1. Rozważmy rzut trzema różnymi monetami. Wówczas przestrzenią próbek będzie $\Omega = \{OOO,\ OOR, \ldots,\ ORR,\ RRR\}$. Ile jest możliwych wyników? Do opisu zdarzenia "na pierwszej monecie wypadł orzeł" obierzemy zbiór $A = \{OOO,\ OOR,\ ORO,\ ORR\}$. Jaki wybrać zbiór B, żeby opisać zdarzenie "wypady dokładnie dwie reszki"?

Z każdym wynikiem $\omega_i \in \Omega$ stowarzyszamy liczbę $p_i = \mathbb{P}[\omega_i]$ - prawdopobobieństwo zajścia tego wyniku tak, aby $p_i \ge 0$ oraz $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Podobnie dla każdego zdarzenia $A \subseteq \Omega$ określamy jego prawdopodobieństwo przez

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{\omega_i\in A} \mathbb{P}[\omega_i] = \sum_{\omega_i\in\Omega} p_i.$$

Można myśleć, że prawdopodobieństwo $\mathbb{P}$ przypisuje miarę (np. masy) wszystkim wynikom $\omega \in \Omega$. Wtedy $\mathbb{P}(A)$ jest miarą zbioru A (przykładowo jego masą).

Przykład B.2. Powróćmy do przykładu B.1. Wszystkie możliwe wyniki w rzucie trzema monetami są jednakowo prawdopodobne. Skoro przestrzeń próbek w tym przypadku ma $|\Omega| = 8$ elementów, to prawdopodobieństwo każdego wyniku $\omega \in \Omega$ wynosi $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{8}$. Wówczas

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(OOO) + \mathbb{P}(OOR) + \mathbb{P}(ORO) + \mathbb{P}(ORR) = \frac{1}{2},$$

gdzie zbiór A dany jest w przykładzie B.1. Jakie jest prawdopodobieństwo zbioru B?

Analizując poprzedni przykład, a dokładniej dobór wag p_i dochodzimy do następującego wniosku.

Wniosek B.1. *Jeżeli w danym eksperymencie losowym wszystkie zdarzenia są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia $A \subseteq \Omega$ dane jest wzorem*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

gdzie $|A|$ i $|\Omega|$ oznaczają odpowiednio liczbę elementów zbioru A i zbioru Ω.

Przykład B.3. Ze zbioru $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ losujemy jedną liczbę. Zakładając, że wylosowanie każdej liczby jest jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowana liczba będzie dwucyfrowa i jej cyfra dziesiątek będzie większa od jej cyfry jedności.

Lemat B.2. $\mathbb{P}$ *spełnia szereg własności:*

- $\mathbb{P}[\Omega] = 1$*;*
- $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$*;*
- $\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$ *($A^c = \Omega \setminus A$ oznacza dopełnienie zbioru A);*
- *Jeżeli zbiory A i B są rozłączne, to $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$;*
- *Dla dowolnych A i B , $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$;*

Dowód. Pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie. □

Przykład B.4. Rzucamy dwiema kostkami sześciennymi. Oblicz prawdopodobieństwo:

a): zdarzenia A – suma oczek na obu kostkach jest równa 8
b): zdarzenia B – na obu kostkach wypadnie parzysta liczba oczek
c): zdarzenia C – na obu kostkach wypadnie parzysta liczba oczek i suma będzie równa 8

Definicja B.1. Prawdopodobieństwem warunkowym $\mathbb{P}(A|B)$ zajścia zdarzenia A, pod warunkiem że zaszło zdarzenia B nazywamy liczbę

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Przykład B.5. Rzucamy dwiema kostkami sześciennymi. Oblicz prawdopodobieństwo:

d): zdarzenia D – suma oczek będzie równa 8 pod warunkiem, że na obu kostkach wypadła parzysta liczba oczek.

Przykład B.6. Z talii 52 kart wyciągnięto losowo kartę. Oblicz prawdopodobieństwo, że jest to dwójka, jeżeli wiadomo (pod warunkiem), że wylosowana karta jest kierem.

Definicja B.2. Dwa zdarzenia $A, B \subseteq \Omega$ nazywamy niezależnymi gdy

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Zauważmy, że powyższa równość jest równoważna $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$, więc informacja o zajściu zdarzenia B nie wpływa na prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A.

Definicja B.3. Trzy zdarzenia A, B, C nazywamy zdarzeniami niezależnymi, jeżeli są parami niezależne i ponadto zachodzi wzór

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Przykład B.7. Rzucamy raz symetryczną kostką do gry. Sprawdź czy zdarzenia A i B są niezależne gdy A – otrzymamy parzystą liczbę oczek; B – otrzymamy liczbę oczek podzielną przez 3.

Przykład B.8. (Niezależne rzuty niesymetryczną monetą)

Dodatek C. Zmienne losowe i wartości oczekiwane

Do opisu zdarzenia losowego często przydają się pewne wielkości liczbowe.

Definicja C.1. Zmienną losową, nazywamy funkcję $X\colon \Omega \to \mathbb{Z}$ o argumentach w zbirze próbek i wartościach całkowitych (ogólnie rzeczywistych).

Przykład C.1. Kontynuując przykłady B.1 oraz B.2. Określmy zmienną losową $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ przez $X(\omega) =$ liczba orłów w wyniku ω. Przykładowo $X(ROR) = 1$ i $X(ROO) = 2$.

Definicja C.2. Definiujemy **wartość oczekiwaną** zmiennej losowej X jako średnią ważoną

$$\mathbb{E}X = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X(\omega_k)p_k.$$

Przykład C.2. Rzucamy kostką, niech Y oznacza wynik ($\Omega = \{1, 2 \ldots, 6\}$ i $Y(\omega) = \omega$ dla $\omega \in \Omega$). Wtedy

$$\mathbb{E}Y = \frac{1}{6} \cdot 1 + \cdots \frac{1}{6} \cdot 6 = 3,5.$$

Przykład C.3. Załóżmy teraz rzucamy dwukrotnie kostką, wówczas Y - suma oczek otrzymanych w dwóch rzutach kostką. Wówczas $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) : \ 1 \leq \omega_1, \omega_2 \leq 6\}$ i $Y(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \omega_2$. Stąd

$$\mathbb{E}Y = \ldots = 7.$$

Zauważmy, że do tego samego wyniku możemy dość bardziej naturalny sposób. Zauważmy, że $Y = Y_1 + Y_2$, gdzie Y_1 to liczba oczek otrzymana w pierwszym rzucie, a Y_2 w drugim. Zauważmy, że

$$\mathbb{E}Y = \sum_{\omega_k \in \Omega} Y(\omega_k)\mathbb{P}(\omega_k) = \sum_{\omega_k \in \Omega} Y_1(\omega_k)\mathbb{P}(\omega_k) + \sum_{\omega_k \in \Omega} Y_2(\omega_k)\mathbb{P}(\omega_k) = \mathbb{E}Y_1 + \mathbb{E}Y_2.$$

Skoro Y_i, $i = 1, 2$ jest wynikiem w jednym rzucie kostką, to $\mathbb{E}Y_i = 3,5$, więc z przykładu C.2

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}Y_1 + \mathbb{E}Y_2 = 7.$$

Lemat C.1. *Niech X_1 i X_2 będą zmiennymi losowymi. Wówczas zmienna losowa X zadana przez $X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$ (w skrócie $X = X_1 + X_2$) spełnia*

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2.$$

Dowód. Dowód pozostawiamy czytelnikowi. Wskazówka: przykład C.3. □

Przykład C.4. Kontynuując przykłady B.1, B.2 i C.1,

$$\mathbb{E}X = 0\mathbb{P}(RRR) + 1\mathbb{P}(ORR) + \ldots + 3\mathbb{P}(OOO) = \ldots = \frac{3}{2}.$$

Jak usprawnić te obliczenia?

Przestrzeń Ω może być bardzo duża, np. do opisu 13 kart, jakie jeden z graczy może otrzymać w brydżu, $|\Omega| = \binom{52}{13} = 635013559600$. W takim przypadku zdarzenia stają się trudne do opisania, a ich prawdopodobieństwa trudne do wyliczenia. Dlatego często przydaje się inne spojrzenie na wartość oczekiwaną $\mathbb{E}X$ i zmienną losową X.

Definicja C.3. Rozkładem zmiennej losowej X nazywamy ciąg μ_X dany wzorem

$$\mu_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\omega\colon X(\omega) = k).$$

Przykład C.5. Powyższą definicję będzie najłatwiej zrozumieć powracając do przykładu C.1. Przez $\{X = k\}$ rozumiemy te zdarzenia elementarne $\omega \in \Omega$, dla których $X(\omega) = k$. Jeżeli X oznacza liczbę orłów przy rzucie trzema monetami, to $\{X = 1\}$ będą stanowić te wyniki, które mają jednego orła, więc $\{X = 1\} = \{ORR, ROR, RRO\}$. Podobnie $\{X = 0\} = \{RRR\}$ i $\{X = 2\} = \{OOR, ORO, ROO\}$. Mamy więc

$$\mu_X(1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{8}, \qquad \mu_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{8}, \quad \mu_X(2) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{8}.$$

Przykład C.6. (**Rozkład Bernoulliego**) Rozważmy n niezależnych rzutów monetą, na której orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p \in [0, 1]$ a reszka wypada z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$. W tym przypadku każde zdarzenie elementarne $\omega \in \Omega$ będzie ciągiem n znaków O lub R. Niech $R(\omega) =$ liczba reszek w ciągu ω i $O(\omega) =$ liczba orłów w ciągu ω. Wówczas $R(\omega) + O(\omega) = n$. Dlaczego? Zauważmy, że $R, O\colon \Omega \to \mathbb{Z}$ są zmiennymi losowymi. Mamy

$$\mathbb{P}(\omega) = p^{O(\omega)}(1-p)^{R(\omega)} = p^{O(\omega)}(1-p)^{n-O(\omega)}, \quad \omega \in \Omega.$$

Dlaczego? Zastanówmy się teraz nad rozkładem zmiennej O. Interesuje nas $\mathbb{P}(O = k)$, dla $0 \le k \le n$ (dlaczego?). Przypomnijmy, że $\{O = k\}$ jest zbiorem tych zdarzeń elementarnych $\omega \in \Omega$, dla których $O(\omega) = k$, czyli tych, które posiadają w sobie k orłów. Tych zdarzeń jest $\binom{n}{k}$ (dlaczego?) i każde z nich ma jednakowe prawdopodobieństwo $= p^k(1-p)^{n-k}$. W efekcie

$$\mu_O(k) = \mathbb{P}(O = k) = \sum_{\omega \in \{O=k\}} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in \{O=k\}} p^k(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}.$$

Mówimy, że zmienna losowa (w tym przypadku O) ma **rozkład Bernoulliego** z parametrami n i p, co zapisujemy w skrócie $\mathcal{B}(n,p)$, jeżeli

$$\mu(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Przykład C.7. (**Rozkład geometryczny**) Przypuśćmy, że mamy do dyspozycji monetę, na której orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p \in (0,1)$ a reszka wypada z prawdopodobieństwem $q = 1-p$. Monetą rzucamy monetą aż do momentu uzyskania pierwszego orła. W tym wypadku przestrzeń zdarzeń składa się z ciągów reszek zakończonych orłem i jednego nieskończonego ciągu reszek, dokładniej $\Omega = \{O, RO, RRO, RRRO, \ldots\} \cup \{RRRRR\ldots\}$. Jeżeli $\omega_k \in \Omega$ składa się z $k-1$ reszek i orła na końcu, to

$$\mathbb{P}(\omega_k) = (1-p)^{k-1}p.$$

Jakie jest prawdopodobieństwo nieskończonego ciągu reszek $RRRRR\ldots$? Jeśli przez $T(\omega)$ oznaczymy chwilę wypadnięcia pierwszego orła, to $T\colon \Omega \to \mathbb{Z}$ staje się zmienną losową i $\{T = k\} = \{\omega_k\}$, więc znamy rozkład zmiennej T

$$\mu_T(k) = \mathbb{P}(T = k) = (1-p)^{k-1}p$$

i nazywany jest on rozkładem geometrycznym z parapetem p, oznaczanym krótko $\mathcal{G}(p)$.

Posługując się rozkładem jesteśmy w stanie obliczać wartości oczekiwane zmiennych losowych zdefiniowanych na bardzo dużych przestrzeniach. Zauważmy, że tożsamość zapisana w następnym lemacie nie odwołuje się w jawny sposób do Ω, a jedynie do rozkładu μ_X zmiennej X.

Lemat C.2. *Niech $X\colon \Omega \to \mathbb{Z}$ będzie zmienną losową. Wówczas*

$$\mathbb{E}X = \sum_k k\mu_X(k) = \sum_k k\mathbb{P}(X = k).$$

Dowód. Na mocy definicji wartości oczekiwanej mamy

$$\mathbb{E}X = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega).$$

Rozważmy zdarzenia $A_k = \{X = k\}$. Wówczas, jeżeli $\omega \in A_k$, to $X(\omega) = k$. Dodatkowo każde zdarzenie elementarne należy do dokładnie jednego ze zbiorów A_k. Możemy zatem pogrupować wyrazy powyższej sumy (" $\sum_{\omega\in\Omega} = \sum_k \sum_{\omega\in A_k}$ ") i otrzymać

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \sum_k \sum_{\omega\in A_k} X(\omega)\mathbb{P}(\omega) = \sum_k \sum_{\omega\in A_k} k\mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_k k \sum_{\omega\in A_k} \mathbb{P}(\omega) = \sum_k k\mathbb{P}(A_k) = \sum_k k\mathbb{P}(X = k) = \sum_k k\mu_X(k).
\end{aligned}$$

□

Przykład C.8. Załóżmy, że zmienna X ma rozkład Bernoullliego $\mathcal{B}(n,p)$. Jaka jest jej wartość oczekiwana $\mathbb{E}X$? Zauważmy, że na mocy Lematu C.2 posiadamy wszystkie potrzebne informacje, ponieważ

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{n} k\mu_X(k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Mamy, podstawiając $j = k-1$

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{n} np\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)} = np\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}p^j(1-p)^{(n-1)-j} = np\cdot 1.$$

Przykład C.9. Załóżmy, że zmienna X ma rozkład geometryczny $\mathcal{G}(p)$. Interesuje nas wartość oczekiwana $\mathbb{E}X$. Podobnie jak poprzednio, dla $q = 1-p$

$$\mathbb{E}X = \sum_{k\geq 1} k(1-p)^{k-1}p = p(1-p)^{-1}\sum_{k\geq 1} kq^k.$$

Podstawową trudnością tutaj jest uporanie się z sumą $\sum_{k\geq 1} kq^k$. Zauważmy w tym celu, że $k = \sum_{j=1}^{k} 1$. Mamy

$$\sum_{k\geq 1} kq^k = \sum_{k\geq 1}\sum_{j=1}^{k} q^k = \sum_{k\geq 1,\, k\geq j\geq 1} q^k = \sum_{j\geq 1, k\geq j} q^k + \sum_{j\geq 1}\sum_{k\geq j} q^k = \sum_{j\geq 1}\frac{q^j}{1-q} = q(1-q)^{-2}.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{p}.$$

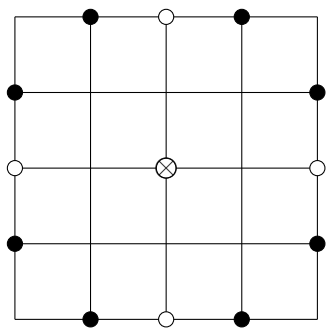
Zadania kwalifikacyjne

1. Pewien matematyk nosi w kieszeniach (lewej i prawej) po jednym pudełku zapałek. Ilekroć chce zapalić papierosa, sięga do losowo wybranej kieszeni. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że gdy po raz pierwszy wyciągnie puste pudełko, w drugim będzie k zapałek. W chwili początkowej matematyk ma dwa pełne pudełka z m zapałkami w każdym.

2. Dwie osoby rzucają po n razy symetryczną monetą. Znaleźć prawdopodobieństwo, że każda z nich otrzyma taką samą liczbę orłów.

3. Gracz startuje z kapitałem k. W każdej rundzie rzuca monetą, jeżeli wypadnie orzeł wygrywa 1, w przeciwnym razie traci 1. Gracz kończy grę, gdy jego kapitał osiągnie poziom n lub zbankrutuje. Oblicz prawdopobobieństwo zakończenia gry przez gracza z kapitałem n.

4. Policja w Nowym Yorku próbuje złapać przestępcę znajdującego się w punkcie $\otimes$. Obstawiła część ulic, ale nie wszystkie. Przestępca w każdym kroku porusza się losowo (tzn. z prawdopobobieństwem 1/4 w każdym z możliwych kierunków). Jeżeli wpadnie na policję $\bullet$ zostaje złapany, jeżeli dotrze do jednego z pól $\circ$ ucieka. Oblicz prawdopobobieństwo, że uda mu się uciec.



5. Alicja i Bill rzucają symetryczną monetą tak długo, aż wypadnie OOR lub ORR. Alicja wygrywa, gdy wzorzec OOR wypadnie jako pierwszy, natomiast Bill, gdy wypadnie ORR. Oblicz prawdopobobieństwo, że grę wygra Alicja. (Uwaga: jest ono różne od 1/2).