# Analiza II, ISIM
## Lista zadań nr 2
wersja 2.0

---

**1.** Pokaż, że jeżeli $f$ jest całkowalna, to dla każdego $c \in \mathbb{R}$ funkcja $c \cdot f$ jest również całkowalna oraz

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

**2.** Udowodnij, że jeżeli $f$ i $g$ są całkowalne na przedziale $[a,b]$ oraz $f(x) \leq g(x)$, to

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

**3.** Pokaż, że jeżeli funkcja $f$ jest całkowalna na przedziale $[a,b]$, to $f$ jest również całkowalna na przedziałach $[a,c]$, $[c,b]$ dla każdego $c \in [a,b]$ oraz

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

**4.** Pokaż, że jeżeli funkcja $f$ jest całkowalna oraz $|f(x)| \leq M$ dla każdego $x \in [a,b]$, to

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq M(b-a)$$

**5.** Oblicz całki przy pomocy granicy odpowiednich sum całkowych

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \qquad \int_b^a \frac{dx}{x^2},\ 0<b<a \qquad \int_0^1 a^x dx\ (a>0)$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx,\ (\text{wsk.: } t_i = e^{\frac{k}{n}}), \qquad \int_1^{10} e^{2x}dx, \qquad \int_1^2 \frac{dx}{x},\ (\text{wsk.: } t_i = 2^{\frac{k}{n}})$$

**6.** Udowodnij oszacowania

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx < 2 \qquad \frac{1}{5} < \int_1^2 \frac{1}{x^2+1}dx < \frac{1}{2}$$

$$5 < \int_1^3 x^x dx < 31, \qquad \int_1^2 \frac{1}{x}dx < \frac{3}{4}.$$

**7.** Funkcja $g(x)$ różni się od funkcji całkowalnej $f(x)$ jedynie w skończenie wielu punktach przedziału $[a,b]$. Pokaż, że funkcja $g$ jest też całkowalna oraz ponadto $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

**8.** Zbadaj całkowalność poniższych funkcji i jeżeli potrafisz, to oblicz wartość całki:

$$\text{(a) } f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \\ -x^2 & \text{dla } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

$$\text{(a) } f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi, \\ \cos x & \text{dla } \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$\text{(a) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } -1 \leq x \leq 0 \text{ i } x \notin \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{dla } 0 < x \leq 1 \text{ i } x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla } -1 \leq x \leq 1 \text{ i } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

**9.** Oblicz podane granice przy pomocy całek Riemanna odpowiednich funkcji

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right), \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}+...+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+...+\frac{1}{(2n)^2}\right), \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1^{2015}+2^{2015}+...+n^{2015}}{n^{2016}}$$

**10.** Udowodnij

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\right)=\log 2.$$

**11.** Oblicz

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$$

**Wskazówka:** Oblicz granicę logarytmu podanego wyrażenia przy pomocy całki Riemanna odpowiedniej funkcji.

**12.** Korzystając z odpowiednich sum całkowych, oblicz granice ciągów

$$a_n=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}, \qquad b_n=\sum_{k=n+1}^{3n}\frac{1}{k}, \qquad c_n=n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^3+k^3}.$$

**13.** Wiedząc, że funkcja $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna, wykaż całkowalność funkcji $g(x)=f(|x|)$ i pokaż, że

$$\int_{-1}^{1}g(x)dx=2\int_{0}^{1}f(x)dx.$$

**14.** Pokaż, że

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 x dx=\int_0^{2\pi}\cos^2 x dx=\pi$$

**15.** Pokaż, że jeżeli funkcja $f$ jest wypukła na odcinku $[a,b]$, to jest też całkowalna.

---

**16.** Pokaż, że jeżeli $f(x)$ jest ciągłą i nieujemną funkcją na przedziale $[a,b]$, to

$$\lim_{p\to\infty}\left(\int_a^b f(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=\max\{f(x):a\le x\le b\}.$$

**17.** Oblicz podaną granicę przy pomocy całki Riemanna odpowiedniej funkcji:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+(1/2)}+...+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+(1/n)}\right)$$

**18.** Co jest większe $\int_0^{\pi}e^{\sin^2 x}dx$ czy $\frac{3\pi}{2}$?

**19.** Pokaż, że każda funkcja wypukła na przedziale $(a,b)$ jest ciągła.