Przykładowe zadania na egzamin

1. Król Artur urządza turniej rycerski, w którym rycerze spotykają się (jakże by inaczej?) systemem turniejowym. W każdym pojedynku obaj rycerze mają takie same szanse na zwycięstwo. Wśród 2^n rycerzy jest dwóch braci. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będą walczyć ze sobą?

2. Przypuśćmy, że 1/10 wszystkich kości do gry jest sfałszowana i zawsze wypada na nich szóstka. Wybieramy losowo dwie kostki i rzucamy nimi. Oblicz

a) prawdopodobieństwo wyrzucenia w sumie 11 oczek;

b) prawdopodobieństwo, że co najmniej jedna kostka była sfałszowana, jeżeli wyrzuciliśmy 11.

3. Z przedziału $[0, 1]$ wybrano losowo 2 punkty (o rozkładzie $U(0, 1)$), które podzieliły go na trzy odcinki. Obliczyć prawdopodobieństwo, że z tych odcinków można zbudować trójkąt.

4. Każdy bok i każdą przekątną sześciokąta foremnego malujemy losowo na jeden z trzech kolorów. Wybór każdego koloru jest jednakowo prawdopodobny, a kolorowania różnych odcinków są niezależne. Niech X oznacza liczbę jednobarwnych trójkątów o wierzchołkach będących wierzchołkami sześciokąta. Oblicz $\mathbb{E}[X]$.

5. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}[0, 1]$, natomiast Y będzie zmienną losową o rozkładzie równomiernym na zbiorze $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Używając funkcji charakterystycznych pokazać, że zmienna losowa $U = X + Y$ ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}[0, n]$.

6. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowych rozkładach wykładniczych $\mathcal{E}xp(\lambda)$. Znaleźć rozkład łączny wektora losowego $(U, V) = (\min(X, Y), \max(X, Y))$ oraz pokazać, że U i V są niezależne.

7. Rzucamy kostką do gry aż do wystąpienia szóstki po raz 50. Oszacuj prawdopodobieństwo, że rzucimy co najwyżej 400 razy.

8. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. Pokazać, że $\frac{1}{n}\max_{1\leq i\leq n}|X_i| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

9. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}[X_1] = 0$ oraz $Var[X_1] = 1$. Pokaż, że:

$$U_n = \frac{\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \overset{\mathcal{D}}{\Longrightarrow} \mathcal{N}(0, 1).$$

10. Niech (X, Y) będzie dwu-wymiarową zmienną losową o rozkładzie zadanym gęstością $f(x, y) = 3x$ dla $0 \leq y \leq x \leq 1$ i $f(x, y) = 0$ poza tym zbiorem. Znajdź rozkłady brzegowe X, Y. Czy X i Y są niezależne?

11. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = Cx^2\mathbf{1}_{[0,2]}$. Wyznacz stałą C. Oblicz $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}\frac{1}{1+X^3}$, $\mathrm{Var}X^2$.

12. Na podstawie losowej próby szacujemy procent dorosłych osób popierających pewną partię polityczną. Chcemy by błąd był mniejszy niż 1% z prawdopodobieństwem 0.95. Ile w tym celu musimy przepytać osób? Jak zmieni się odpowiedź, jeśli wiemy, ze partię popiera nie więcej niż 10% wyborców?