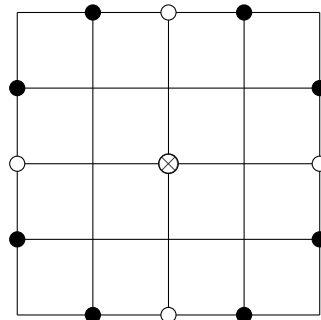


RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA 2B

LISTA ZADAŃ NR 1

1. Policja w Nowym Yorku próbuje złapać przestępcę znajdującego się w punkcie \otimes . Obstawiała część ulic, ale nie wszystkie. Przestępca w każdym kroku porusza się losowo (tzn. z prawdopodobieństwem $1/4$ w każdym z możliwych kierunków). Jeżeli wpadnie na policję \bullet zostaje złapany, jeżeli dotrze do jednego z pól \circ ucieka. Oblicz prawdopodobieństwo, że uda mu się uciec.



2. Alicja i Bob rzucają symetryczną monetą tak długo, aż wypadnie OOR lub ORR . Alicja wygrywa, gdy wzorzec OOR wypadnie jako pierwszy, natomiast Bob, gdy wypadnie ORR . Jaka jest oczekiwana długość gry? Jaka jest oczekiwana długość gry jeżeli założymy, że wygra Alicja?

3. Alicja i Bob rzucają symetryczną monetą tak długo, aż wypadnie $OOOR$ lub $ORRR$. Alicja wygrywa, gdy wzorzec $OOOR$ wypadnie jako pierwszy, natomiast Bob, gdy wypadnie $ORRR$. Oblicz prawdopodobieństwo, że grę wygra Alicja.

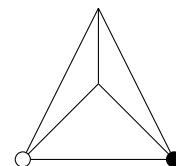
4. Rzucamy wielokrotnie monetą. Oznaczmy przez T pierwszy moment, w którym wypadną trzy orły pod rząd. Oblicz $\mathbb{E}T$.

5. (Ruina gracza) Gracz startuje z kapitałem k . W każdej rundzie rzuca monetą, jeżeli wypadnie orzeł wygrywa 1, w przeciwnym razie traci 1. Gracz kończy grę, gdy jego kapitał osiągnie poziom n lub zbankrutuje. Przedstaw odpowiedni spacer losowy na grafie.

- Czy jest on nieredukowalny? Czy posiada miarę stacjonarną?
- Oblicz prawdopodobieństwo zakończenia gry przez gracza z kapitałem n , tzn. $\mathbb{P}_k[X_\tau = n]$, gdzie τ oznacza moment zakończenia gry.
- Oblicz wartość oczekiwaną długości gry, tzn. $\mathbb{E}_k\tau$. Wskazówka: ułóż odpowiednie równanie rekurencyjne, a następnie je rozwiąż.

6. W wierzchołku A pięciokąta $ABCDE$ znajduje się jabłko, a dwa wierzchołki dalej, w C znajduje się robaczek. Każdego dnia robaczek pełza z prawdopodobieństwem $1/2$ do jednego z sąsiednich wierzchołków. Po osiągnięciu wierzchołka A robaczek zatrzymuje się na obiad. Jaka jest wartość oczekiwana liczby dni, po których robaczek dotrze na obiad?

7. Alicja i Bill wędrują losowo po grafie. Początkowo Alicja jest w wierzchołku \circ , a Bob w \bullet . W każdym kroku przechodzą do jednego z sąsiednich wierzchołków z prawdopodobieństwem $1/3$. Niech T oznacza moment, którym się spotkają. Oblicz $\mathbb{E}T$.



8. Pewien Pan ma problem ze znalezieniem pracy. Jeżeli jakiegoś poranka nie jest zatrudniony, to ze stałym prawdopodobieństwem p będzie zatrudniony przed wieczorem. Ale jeśli zaczyna on dzień będąc już zatrudnionym, to z prawdopodobieństwem q jeszcze przez zmrok zostanie zwolniony. Załóżmy, że pierwszego dnia rano był on zatrudniony. Niech X_n oznacza liczbę dni, okresie pierwszych n dni, kiedy był on zatrudniony. Co możesz powiedzieć o $\mathbb{E}X_n$? Czy umiesz policzyć granicę $\mathbb{E}X_n/n$?

9. (Funkcja łańcucha Markowa nie musi być łańcuchem Markowa.) Niech $\{X_t\}$ będzie łańcuchem Markowa na przestrzeni stanów $\Omega = \{s_1, s_2, s_3\}$, z macierzą przejścia

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i rozkładem początkowym $\mu_0 = (1/3, 1/3, 1/3)$. Dla każdego n , zdefiniujemy

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } X_n = s_1 \\ 1 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

Pokaż, że Y_n nie jest łańcuchem Markowa.

10. Pokaż, że jeżeli łańcuch Markowa jest nieredukowalny, to wszystkie punkty mają ten sam okres.

11*. Jeżeli łańcuch Markowa jest nieredukowalny i aperiodyczny, to istnieje M takie, że $P^t(x, y) > 0$ dla wszystkich $x, y \in \Omega$ oraz $t \geq M$.

12. Pokaż, że nierozkładalny łańcuch Markowa posiada co najwyżej jedną miarę stacjonarną. **Wskazówka:** Niech P będzie macierzą przejścia, wówczas jedynymi funkcjami harmonicznymi (tzn. spełniającymi $Ph = h$) są funkcje stałe ...

13. Uzasadnij, że jeżeli łańcuch Markowa ma dwie miary stacjonarne, to ma ich nieskończenie wiele.

14. (Dowód istnienia miary stacjonarnej) Niech P będzie macierzą przejścia łańcucha Markowa na skończonej przestrzeni stanów Ω . Dla dowolnego rozkładu początkowego μ na Ω i $n > 0$ definiujemy

$$\nu_n = \frac{1}{n}(\mu + \mu P + \dots + \mu P^{n-1}).$$

- Pokaż, że dla każdego $x \in \Omega$ i $n > 0$,

$$|\nu_n P(x) - \nu_n(x)| \leq \frac{2}{n}.$$

- Pokaż, że istnieje podciąg $\{\nu_{n_k}\}$ taki, że $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_{n_k}(x)$ istnieje dla każdego $x \in \Omega$.
- Dla $x \in \Omega$ zdefiniujemy $\nu(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_{n_k}(x)$. Wykaż, że ν jest miarą stacjonarną P .

15. Skoczek znajduje się w rogu szachownicy. Zaczyna się poruszać w sposób losowy wybierając za każdym razem w sposób jednostajny jeden z dozwolonych ruchów. Jaka jest wartość oczekiwana liczby ruchów po których skoczek wróci do punktu startowego?

16. Rozważmy spacer losowy na $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$, w którym cząsteczka porusza się w lewo lub w prawo z prawdopodobieństwem $1/2$, za wyjątkiem punktów 0 i n . W punkcie n spacer pozostaje lub przechodzi do $n-1$ z prawdopodobieństwem $1/2$. Stan 0 jest stanem absorbującym, a więc po trafieniu w niego cząsteczka pozostanie w nim na zawsze. Oblicz wartość oczekiwaną czasu trafienia w 0 cząsteczki, która startuje w punkcie n .

17. Rozważmy prosty spacer losowy na \mathbb{Z}_n . Oznaczmy przez τ pierwszy moment w którym zostały odwiedzone wszystkie stany. Oblicz $\mathbb{E}\tau$. **Wskazówka:** skorzystaj z zadania o ruinie gracza.

18. W dwóch urnach znajduje się w sumie k kul (k -ustalona liczba). Definiujemy w następujący sposób łańcuch Markowa. W każdym kroku losujemy jednostajnie jedną z kul i przekładamy ją do sąsiedniej urny. Niech X_t oznacza liczbę kul znajdujących się w czasie t w pierwszej urnie. Wówczas X_t jest łańcuchem Markowa. Znajdź jego miarę stacjonarną. Pokaż, że proces jest odwracalny.

19*. Niech Y oznacza ostatni stan oznaczony przez prosty spacer losowy na \mathbb{Z}_n startujący z 0 . Pokaż, że Y ma rozkład jednostajny na zbiorze $\{1, \dots, n-1\}$.