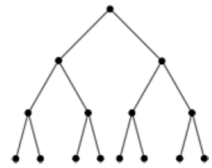
Rachunek prawdopodobieństwa 2B

Lista zadań nr 2

1. Niech $\{X_n\}$ będzie prostym spacerem losowym na $\mathbb{Z}^2$ startującym z punktu $(0,0)$. Oblicz $\mathbb{P}[X_n = (0,0)]$.

2. Nieskończone drzewo binarne jest to drzewo z korzeniem, w którym każdy wierzchołek ma 2 potomków i wszystkie wierzchołki poza korzeniem mają jednego rodzica. Uzasadnij, że prosty spacer losowy (startujący w korzeniu i w każdym kroku wybierający jednostajnie jednego z sąsiadów) jest tranzytywny.



3*. (Lokalne twierdzenie graniczne) Załóżmy, że $\{X_n\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wartościach całkowitych i o takim samym rozkładzie. Oznaczmy przez ϕ funkcję charakterystyczną X_j i niech $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Załóżmy ponadto, że rozkład X_j jest symetryczny względem 0, $\mathrm{Var}(X_j) = \sigma^2$, $\mathbb{E}|X_j|^3 < \infty$, $\mathbb{P}[X_j = 0] > 0$, $\mathbb{P}[X_j = 1] > 0$. Pokaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi\sigma^2 n} \cdot \mathbb{P}[S_n = 0] = 1.$$

Wskazówka:

$$\mathbb{P}[S_n = 0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi^n(t)dt = \frac{1}{2\pi\sqrt{n}}\int_{-\pi\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}} \phi(t/\sqrt{n})^n dt.$$

4. Niech $\Omega = [0,1]$ i niech $\mathbb{P}$ będzie miarą Lebesgue'a na $[0,1]$. Znajdź $\mathbb{E}[f|\mathcal{F}]$, jeżeli

1. $f(x) = \sqrt{x}$ i $\mathcal{F} = \sigma\{[0,1/4),[1/4,1]\}$.
2. $f(x) = -x$ i $\mathcal{F} = \sigma\{[0,1/1),[1/3,1]\}$.

5. Niech X i Y będa dwoma niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie: $\mathbb{P}[X=1] = 1 - \mathbb{P}[X=0] = p$ i niech $Z = \mathbf{1}_{\{X+Y=0\}}$. Oblicz $\mathbb{E}[X|Z]$ i $\mathbb{E}[Y|Z]$. Czy te zmienne są niezależne?

6. Dla $\Omega = \{a,b,c\}$ podaj przykład zmiennej losowej X i σ-ciał $\mathcal{F},\mathcal{G}$ takich, że

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]|\mathcal{G}] \neq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{F}].$$

7. Rzucamy 10 razy symetryczną monetą. Niech X oznacza łączną liczbę orłów, a Y liczbę orłów w pierwszych czterech rzutach. Znajdź $\mathbb{E}[X|Y]$.

8. Zmienna losowa (X,Y) ma gęstość $g(x,y) = \frac{x^3}{2}\, e^{-x(y+1)}\mathbf{1}_{\{x>0,y>0\}}$. Wyznacz $\mathbb{E}[Y|X]$.

9. Zmienne losowe X_1, X_2, X_3 są niezależne i mają ten sam rozkład $\mathbb{P}[X_i = -1] = \mathbb{P}[X_i = 1] = 1/2$. Oblicz $\mathbb{E}[X_1|X_1 + X_2 + X_3]$ oraz $\mathbb{E}[X_1X_2|X_1 + X_2X_3]$.

10. Wiadomo, że p procent monet stanowią monety fałszywe, z orłem po obu stronach. Losujemy ze zwracaniem n monet i każdą z nich wykonujemy rzut. Niech F oznacza liczbę losowań, w wyniku których wyciągnięto monetę fałszywą, O - liczbę wyrzuconych orłów. Udowodnij, że $\mathbb{E}[F|O] = 2pO/(100+p)$.

11. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$ o takim samym rozkładzie. Oblicz

$$\mathbb{E}[X_1|X_1 + \cdots + X_n].$$

12. Niech X, Y będą dwoma niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie. Wyznacz

$$\mathbb{E}[X|X^2 + Y^2].$$

13. Pokaż, że jeżeli Y jest ograniczoną zmienną losową mierzalną względem $\mathcal{G}$, to

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{G}].$$

14. (Nierówność Jensena) Dana jest funkcja wypukła $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz $\mathcal{G}$ pod-σ-ciało $\mathcal{F}$. Załóżmy, że zmienne losowe X i $\phi(X)$ są całkowalne. Pokaż, że

$$\phi(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\phi(X)|\mathcal{G}].$$

15. Udowodnij, że jeżeli zmienne losowe X i Y spełniają $\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}Y^2 < \infty$ oraz $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = Y$, $X = Y$ p.w.

16. Pokaż, że jeżeli X, Y, Z są całkowalnymi zmiennymi losowymi takimi, że

$$\mathbb{E}[X|Y] = Z, \qquad \mathbb{E}[Y|Z] = X, \qquad \mathbb{E}[Z|X] = Y,$$

to $X = Y = Z$ p.w.

17. Rozpatrzmy schemat Bernoulliego n prób z prawdopodobieństwem sukcesu p. Jaka jest średnia liczba sukcesów w pierwszej próbie, jeżeli wiemy, ile zaszło sukcesów w całej serii?

18. Niech X będzie całkowalną zmienną losową. Pokaż, że dla dowolnej zmiennej losowej Y istnieje funkcja h taka, że $\mathbb{E}[X|Y] = h(Y)$.

19. Dla $\mathbb{E}X^2 < \infty$ definiujemy warunkową wariancję

$$\mathrm{var}[X|\mathcal{G}] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2|\mathcal{G}].$$

Wykaż, że

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{var}[X|\mathcal{G}]] + \mathrm{var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]).$$